

Bungee jumping

Ένα άτομο, μάζας $m = 100\text{kg}$, κάνοντας bungee jumping πηδάει από την εικονιζόμενη γέφυρα. Το λάστιχο έχει μήκος $\ell = 30\text{m}$ και έχει σταθερά $k = 50\text{N/m}$.



- i) Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη απόσταση από το νερό;
- ii) Πόσο διαρκεί η πτώση συνολικά;
- iii) Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα που θ' αποκτήσει;
- iv) Ποια είναι η μέγιστη δύναμη που θα δεχτεί ο άνθρωπος από το λάστιχο;
- v) Την στιγμή που έχει πέσει κατά 70m από την κορυφή του πύργου με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η κινητική του ενέργεια και με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η ορμή του;

$$g = 10\text{m/s}^2$$

Λύση:

- i) Θα απαντήσουμε στο πρώτο ερώτημα με δυο τρόπους, με επίκληση της διατήρησης της ενέργειας και «ταλαντωτικά».

- Διατήρηση ενέργειας:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2.$$

Επειδή η ταχύτητα είναι μηδενική και στις δυο θέσεις

$$\begin{aligned} K_1 = K_2 = 0 &\Rightarrow U_1 = U_2 \Rightarrow mg(\ell + \Delta\ell) = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \\ \Rightarrow 1000(30 + \Delta\ell) &= \frac{1}{2}50\Delta\ell^2 \Rightarrow 40(30 + \Delta\ell) = \Delta\ell^2 \\ &\Rightarrow \Delta\ell^2 - 40\Delta\ell - 1200 = 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας την δευτεροβάθμια βρίσκουμε $\Delta\ell = 60\text{m}$ ή $\Delta\ell = -20\text{m}$.

Η αρνητική λύση απορρίπτεται μια και δεν είναι δυνατόν να έχουμε συσπείρωση οπότε: $\Delta\ell = 60\text{m}$.

Το ελάχιστο ύψος είναι $\ell + \Delta\ell = 90\text{m}$.

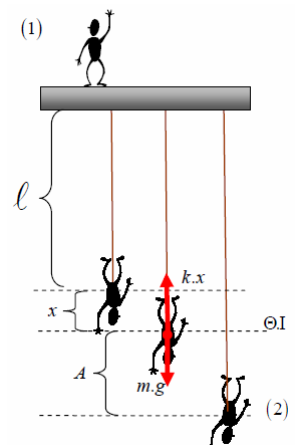
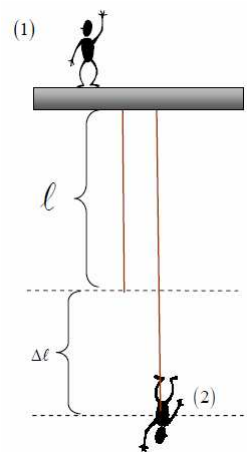
- Χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ταλαντώσεων. Ο άνθρωπος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Στη θέση ισορροπίας:

$$k \cdot x = m \cdot g \Rightarrow x = \frac{m \cdot g}{k} = 20\text{m}.$$

Όταν ο άνθρωπος έχει πέσει 30m έχει ταχύτητα που υπολογίζεται με διατήρησης ενέργειας από την θέση (1) ως τη θέση ισορροπίας:

$$m \cdot g \cdot \ell = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2g\ell} = 10\sqrt{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η ενέργεια στη θέση αυτή είναι όση και στη θέση (2) οπότε:



$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A^2 = x^2 + \frac{m}{k}.v^2 \Rightarrow A^2 = 400 + 2.600 \Rightarrow A = 40m$$

Το ελάχιστο ύψος είναι $\ell + x + A = 90m$.

Η πρώτη λύση μοιάζει ευκολότερη αλλά δεν μας δίνει το x κάτι που θα χρειαστούμε για τον υπολογισμό του χρόνου,

ii) Η διάρκεια της πτώσης:

Αυτή μπορεί να θεωρηθεί άθροισμα δυο χρονικών διαστημάτων, ενός Δt_1 κατά το οποίο έκανε ελεύθερη πτώση και ενός Δt_2 κατά το οποίο πήγε από τη θέση φυσικού μήκους στη θέση (2).

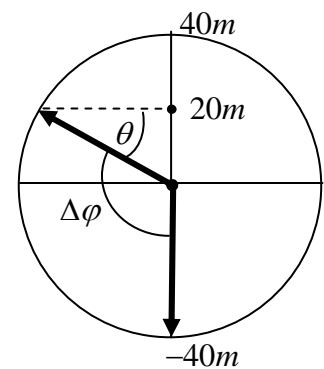
$$\ell = \frac{1}{2}g\Delta t_1^2 \Rightarrow \Delta t_1 = \sqrt{\frac{2\ell}{g}} = \sqrt{6}s \approx 2,45s$$

Το Δt_2 θα υπολογισθεί με την βοήθεια στερεομέτρου.

$$\eta\mu\theta = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Προφανώς:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega.\Delta t_2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}.\Delta t_2 = \frac{2\pi}{3} \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{50}{100}}.\Delta t_2 &= \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}s \approx 2,96s \end{aligned}$$



Η διάρκεια της πτώσης είναι $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \approx 2,45s + 2,96s = 5,41s$.

iii) Μέγιστη ταχύτητα έχει στη θέση ισοροπίας και είναι αυτή:

$$v_m = A.\omega = A.\sqrt{\frac{k}{m}} = 40.\sqrt{\frac{50}{100}} = 20\sqrt{2} \frac{m}{s} \approx 28,2 \frac{m}{s}$$

iv) Μέγιστη δύναμη από το σχοινί δέχεται στη θέση πλάτους.

Είναι δε αυτή:

$$F = k(x + A) = 50 \frac{N}{m} . 60m = 3000N$$

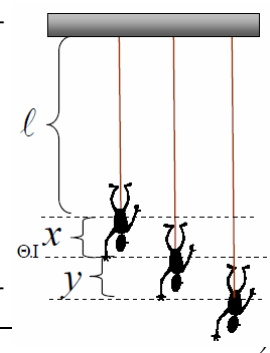
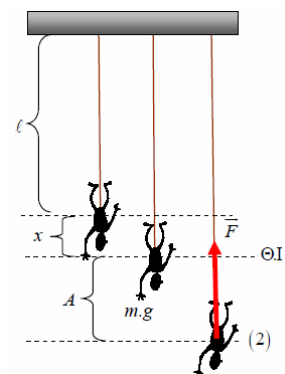
Προσέξτε ότι είναι τριπλάσια του βάρους του.

v) Τη στιγμή που έχει πέσει κατά 70 m βρίσκεται 20 m κάτω από τη θέση ισοροπίας, $y = -20m$.

Για τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής του ενέργειας:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{F_{ολ}}}{dt} = \frac{F_{ολ}dx}{dt} = F_{ολ}.v = -k.y.v$$

Επειδή οι θέσεις x και y ισαπέχουν της θέσης ισοροπίας 'συναντάμε σ' αυτές ί-



διες ταχύτητες δηλαδή $v = -10\sqrt{6} \frac{m}{s}$.

$$\frac{dK}{dt} = -k \cdot y \cdot v = -50 \frac{N}{m} \cdot (-20m) \cdot (-10\sqrt{6}) \frac{m}{s} = -10.000\sqrt{6} \frac{J}{s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη, δηλαδή:

$$\frac{dP}{dt} = -k \cdot y = -50 \cdot (-20) \frac{kgm}{s^2} = 1000 \frac{kgm}{s^2}$$

Το θετικό πρόσημο (παρά το ότι μειώνεται το μέτρο της ταχύτητας) ερμηνεύεται από το ότι η ορμή είναι αρνητική.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

Γιάννης Κυριακόπουλος