Σύνθεση δύο ΑρμονικώνΤαλαντώσεων που εξελίσσονται στην ίδια ευθεία γύρω από την ίδια θέση με ίδιο πλάτος και γωνιακές συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο

Έστω ότι υλικό σημείο εκτελεί ταυτόχρονα τις ταλαντώσεις:

$$x_1 = A\eta\mu(\omega_1 t) \text{ και } x_2 = A\eta\mu(\omega_2 t)$$

που εξελίσσονται στην ίδια ευθεία γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας.

α) Πως ερμηνεύεται η φράση: « με γωνιακές συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο»;

β) Να γραφεί η εξίσωση της σύνθετης κίνησης

γ) Να βρεθούν η γωνιακή συχνότητα ω΄, η συχνότητα f΄και η περίοδος T΄ ˝των ταλαντώσεων˝ που επιβάλλει ο ημιτονοειδής παράγοντας

δ) Να βρεθεί ποιες χρονικές στιγμές μηδενίζεται ο όρος: $A' = 2A\sigma\upsilon\nu\dfrac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}t$

ε) Να βρεθεί ποιες χρονικές στιγμές ο όρος: $A' = 2A\sigma\upsilon\nu\dfrac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}t$ αποκτά τιμή $A' = \pm 2A$

στ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του όρου:

$$A' = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}t$$

ζ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων κατά απόλυτη τιμή του όρου:

$$A' = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}t$$

Απάντηση:

α) Δύο γωνιακές συχνότητες ω_1 και ω_2 διαφέρουν πολύ λίγο όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους $|\omega_1 - \omega_2|$ είναι πολύ μικρότερη από την καθεμιά ξεχωριστά γωνιακή συχνότητα ω_1 και ω_2:

$$|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1 \text{ και } |\omega_1 - \omega_2| << \omega_2$$

β) Σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων ισχύει:

$$x = x_1 + x_2 = A\eta\mu\omega_1 t + A\eta\mu\omega_2 t = A(\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t) \Leftrightarrow x = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}\eta\mu\frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\eta\mu\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί στη μορφή: $x = A'\eta\mu\dfrac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t \quad (1)$

$$\text{όπου} \quad A' = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}t \quad (2)$$

Ο όρος Α’ μεταβάλλεται αργά με το χρόνο σε σχέση με τον ημιτονικό όρο, αφού :

$\left|\omega_1 - \omega_2\right| << \omega_1 + \omega_2$, άρα η περίοδος μεταβολής του είναι σημαντικά πιο μεγάλη από την αντίστοιχη του ημιτονικού όρου . Η απόλυτη τιμή $\left|A'\right|$ ονομάζεται και πλάτος (σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο) της σύνθετης κίνησης.

Η σχέση (1) αντιστοιχεί σε περιοδική μη αρμονική κίνηση.

γ) Αν συγκρίνουμε την (1): $x = A'\eta\mu\dfrac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t$ με την $x = A'\eta\mu\omega' t$ βρίσκουμε:

$$\omega' = \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2} \quad (1\alpha)$$

Οπότε:

$$\omega' = \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2} \Leftrightarrow 2\pi f' = \frac{2\pi(f_1+f_2)}{2} \Leftrightarrow f' = \frac{f_1+f_2}{2} \quad (1\beta)$$

Αντίστοιχα:

$$T' = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow T' = \frac{2}{f_1+f_2} \Leftrightarrow T' = \frac{2}{\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}} \Leftrightarrow T' = \frac{2}{\dfrac{T_1+T_2}{T_1T_2}} \Leftrightarrow T' = \frac{2T_1T_2}{T_1+T_2} \quad (1\gamma)$$

δ)

$$\begin{aligned} &A' = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t = 0 = \sigma\upsilon\nu(2\kappa+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\left|\omega_1-\omega_2\right|}{2}t = (2\kappa+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2\pi\left|f_1-f_2\right|}{2}t = (2\kappa+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2\kappa+1}{2\left|f_1-f_2\right|}, \kappa \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (3)$$

ε)

$$\begin{aligned} &A' = 2A \Leftrightarrow 2A\sigma\upsilon\nu\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t = 2A \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t = 1 = \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\left|\omega_1-\omega_2\right|}{2}t = 2\kappa\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi\left|f_1-f_2\right|}{2}t = 2\kappa\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\kappa}{\left|f_1-f_2\right|}, \kappa \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &A' = -2A \Leftrightarrow 2A\sigma\upsilon\nu\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t = -2A \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t = -1 = \sigma\upsilon\nu(2\kappa+1)\pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\left|\omega_1-\omega_2\right|}{2}t = (2\kappa+1)\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi\left|f_1-f_2\right|}{2}t = (2\kappa+1)\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\kappa+1}{\left|f_1-f_2\right|}, \kappa \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (5)$$

στ) Από την (3) έχουμε:

$$T = t_{k+1} - t_k = \frac{2(\kappa+1)+1}{2\left|f_1-f_2\right|} - \frac{(2\kappa+1)}{2\left|f_1-f_2\right|} \Leftrightarrow T = \frac{3-1}{2\left|f_1-f_2\right|} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\left|f_1-f_2\right|} \quad (6\alpha)$$

ζ) Έστω ότι κάποια στιγμή t_k ισχύει $A' = 2A$ και κάποια στιγμή t_k' ισχύει $A' = -2A$.

Τότε από (4) και (5) έχουμε:

$$T = t_k^{'} - t_k = \frac{2\kappa+1}{|f_1 - f_2|} - \frac{2\kappa}{|f_1 - f_2|} \Leftrightarrow T = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \quad (6\beta)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Υλικό σημείο Σ ενός ελαστικού μέσου εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις, που εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση. Οι εξισώσεις απομάκρυνσης των δύο ταλαντώσεων περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$x_1 = 0{,}1\eta\mu(202\pi t)(S.I) \text{ και } x_2 = 0{,}1\eta\mu(198\pi t)(S.I)$$

α) Να γραφεί η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης του Σ

β) Ποιες χρονικές στιγμές μηδενίζεται ο όρος της σύνθετης κίνησης που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο («πλάτος»); Ποια χρονική στιγμή μηδενίζεται για πρώτη φορά; Ποια η φάση των δύο ταλαντώσεων, ποια η διαφορά φάσης μεταξύ τους, ποια η τιμή του «πλάτους» και ποιες οι τιμές των επιμέρους απομακρύνσεων τη στιγμή αυτή;

γ) Ποιες χρονικές στιγμές γίνεται μέγιστος κατά απόλυτη τιμή ο όρος της σύνθετης κίνησης που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο; Ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό για πρώτη φορά; Ποια η φάση των δύο ταλαντώσεων, ποια η διαφορά φάσης μεταξύ τους, ποια η τιμή του «πλάτους» και ποιες οι τιμές των επιμέρους απομακρύνσεων τη στιγμή αυτή;

δ) Πόσες (περίπου) πλήρεις ταλαντώσεις της σύνθετης κίνησης εκτελεί το υλικό σημείο σε χρονικό διάστημα ίσο με αυτό που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του «πλάτους»;

Απάντηση:

Από τη σχέση $x_1 = 0{,}1\eta\mu(202\pi t)(S.I)$ έχουμε ότι: $\omega_1 = 202\pi \frac{rad}{s}$ και $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \Leftrightarrow f_1 = 101 Hz$

ενώ από τη σχέση $x_2 = 0{,}1\eta\mu(198\pi t)(S.I)$ έχουμε ότι: $\omega_2 = 198\pi \frac{rad}{s}$ και $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \Leftrightarrow f_2 = 99 Hz$

α) Σύμφωνα με τη σχέση (1) της θεωρητικής επεξεργασίας, η σύνθετη κίνηση περιγράφεται από τη σχέση: $x = 0{,}2\sigma\upsilon\nu(2\pi t)\eta\mu(200\pi t)(S.I)$ (7)

β) $A^{'} = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = 0 = \sigma\upsilon\nu(2\kappa+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\pi t = (2\kappa+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2\kappa+1}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}^+$ (8)

Στο ίδιο συμπέρασμα φθάνουμε και από τη σχέση (3): $t = \frac{(2\kappa+1)}{2|f_1 - f_2|} = \frac{2\kappa+1}{2\cdot 2} = \frac{2\kappa+1}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}^+$

Μηδενίζεται για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή που προκύπτει αν στην (8) θέσουμε κ=0:

$$(8) \Rightarrow t = \frac{1}{4} s.$$

Οι φάσεις των ταλαντώσεων την ίδια στιγμή είναι: $\varphi_1 = 202\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{101\pi}{2} = 50\pi + \frac{\pi}{2}$ rad και

$$\varphi_2 = 198\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{99\pi}{2} = 48\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

Η διαφορά φάσης είναι: $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad.

Αυτό δηλώνει ότι τα περιστρεφόμενα διανύσματα που παριστάνουν τις συνιστώσες ταλαντώσεις είναι αντίθετα τη δεδομένη χρονική στιγμή, άρα το «πλάτος» είναι μηδενικό.

Ισοδύναμα: $A^{'} = 0,2\sigma\upsilon\nu(2\pi \cdot \frac{1}{4}) = 0$.

Οι τιμές των επιμέρους απομακρύνσεων τη στιγμή αυτή είναι;

$$x_1 = 0,1\eta\mu(50\pi + \frac{\pi}{2}) = 0,1m \quad \text{και} \quad x_2 = 0,1\eta\mu(48\pi + \frac{3\pi}{2}) = -0,1m$$

οι οποίες ικανοποιούν την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων αφού: $x = x_1 + x_2 = 0$.

Προφανώς όταν Α΄=0, την ίδια στιγμή $x = A^{'}\eta\mu(\omega^{'}t) = 0$.

γ) $A' = 2A = 0,2m \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = 1 = \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi) \Leftrightarrow 2\pi t = 2\kappa\pi \Leftrightarrow t = \kappa, \kappa \in \mathbb{Z}^+$ (9)

Στο ίδιο συμπέρασμα φθάνουμε και από τη σχέση (4): $t = \frac{2\kappa}{|f_1 - f_2|} = \frac{2\kappa}{2} = \kappa, \kappa \in \mathbb{Z}^+$

Συμβαίνει αυτό για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή που προκύπτει αν στην (9) θέσουμε κ=0:

$$(9) \Rightarrow t = 0$$

Οι φάσεις των ταλαντώσεων την ίδια στιγμή είναι: $\varphi_1 = 0$ rad και $\varphi_2 = 0$ rad

Η διαφορά φάσης είναι: $\Delta\varphi = 0$ rad. Αυτό δηλώνει ότι τα περιστρεφόμενα διανύσματα που παριστάνουν τις συνιστώσες ταλαντώσεις είναι ίσα τη δεδομένη χρονική στιγμή, άρα το «πλάτος» είναι μέγιστο:

$$\vec{A'} = \vec{A_1} + \vec{A_2} \Leftrightarrow |A'| = 2A = 0,2m.$$

Ισοδύναμα: $A^{'} = 0,2\sigma\upsilon\nu(2\pi 0) = 0,2m$.

Οι τιμές των επιμέρους απομακρύνσεων τη στιγμή αυτή είναι;

$$x_1 = 0,1\eta\mu 0 = 0 \quad \text{και} \quad x_2 = 0,1\eta\mu 0 = 0$$

οι οποίες ικανοποιούν την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων αφού: $x = x_1 + x_2 = A'\eta\mu 0 = 0$.

Προφανώς όταν Α΄=0,2m=2A, την ίδια στιγμή $x = x_1 + x_2 \neq 2A$, αλλά χ=0 (σχήμα 1.37 σελίδα 28 σχολικού)

Επίσης:

$$A' = -2A = -0,2m \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = -1 = \sigma\upsilon\nu(2\kappa+1)\pi \Leftrightarrow 2\pi t = (2\kappa+1)\pi \Leftrightarrow$$
$$t = \frac{2\kappa+1}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}^+ \qquad (10)$$

Στο ίδιο συμπέρασμα φθάνουμε και από τη σχέση (5): $t = \frac{2\kappa+1}{|f_1 - f_2|} = \frac{2\kappa+1}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}^+$

Συμβαίνει αυτό για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή που προκύπτει αν στην (10) θέσουμε κ=0:

$$(10) \Rightarrow t = \frac{1}{2}s$$

Οι φάσεις των ταλαντώσεων την ίδια στιγμή είναι:

$$\varphi_1 = 202\pi \cdot \frac{1}{2} = 101\pi \text{ rad} \text{ και } \varphi_2 = 198\pi \cdot \frac{1}{2} = 99\pi \text{ rad}$$

Η διαφορά φάσης είναι: $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi$ rad. Αυτό δηλώνει ότι τα περιστρεφόμενα διανύσματα που παριστάνουν τις συνιστώσες ταλαντώσεις είναι ίσα τη δεδομένη χρονική στιγμή, άρα το πλάτος είναι μέγιστο: $\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2} \Leftrightarrow |A'| = 2A = 0,2m$

$$\text{Όμως : } A^{'} = 0,2\sigma\upsilon\nu(2\pi \cdot \frac{1}{2}) = 0,2\sigma\upsilon\nu\pi = -0,2m.$$

Οι τιμές των επιμέρους απομακρύνσεων τη στιγμή αυτή είναι;

$$x_1 = 0,1\eta\mu 101\pi = 0 \text{ και } x_2 = 0,1\eta\mu 99\pi = 0$$

οι οποίες ικανοποιούν την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων αφού:

$$x = x_1 + x_2 = A'\eta\mu(100\pi) = 0.$$

Προφανώς όταν Α΄=-0,2m=-2A, την ίδια στιγμή $x = x_1 + x_2 \neq -2A$ αλλά χ=0 (σχήμα 1.37 σελίδα 28 σχολικού)

δ) Η δεύτερη χρονική στιγμή που μηδενίζεται το «πλάτος» Α΄=0 προκύπτει από την (8) θέτοντας κ=1:

$$(8) \Rightarrow t = \frac{2 \cdot 1 + 1}{4} = \frac{3}{4}s$$

Την ίδια στιγμή: $\varphi_1 = 202\pi \cdot \frac{3}{4} = 151,5\pi = 150\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_1 = -0,1m$ και

$$\varphi_2 = 198\pi \cdot \frac{3}{4} = 148,5\pi = 148\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 = 0,1m$$

Άρα: $x = x_1 + x_2 = 0$

Συμπεραίνουμε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του «πλάτους» Α΄ εκτελείται ακέραιος αριθμός ταλαντώσεων της σύνθετης κίνησης. Ο αριθμός αυτός προκύπτει αν λάβουμε υπ' όψη μας ότι μια ταλάντωση της σύνθετης κίνησης πραγματοποιείται σε χρονικό διάστημα:

$$T^{'} = \frac{2\pi}{\omega^{'}} = \frac{2\pi}{200\pi} \Leftrightarrow T^{'} = \frac{1}{100}s$$

ενώ μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του «πλάτους» Α΄ μεσολαβεί χρονικό διάστημα

$$\Delta t = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}s. \text{ Άρα: } N = \frac{\Delta t}{T^{'}} \Leftrightarrow N = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{100}} = 50$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασχουρίδης