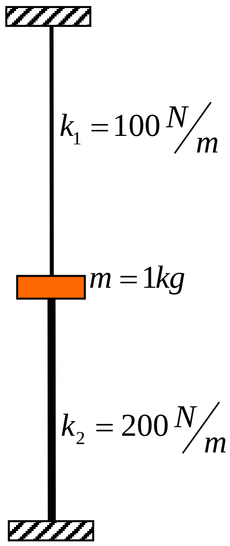
Ταλάντωση με δύο λάστιχα εκατέρωθεν.



Το σώμα του σχήματος έχει μάζα 1 kg και ισορροπεί όπως στο σχήμα συνδεδεμένο με δύο ιδανικά αβαρή λάστιχα. Το επάνω έχει τεντωθεί κατά 0,3 m. Αν g = 10 m / s^2 τότε:

i) Βρείτε την παραμόρφωση του κάτω λάστιχου.

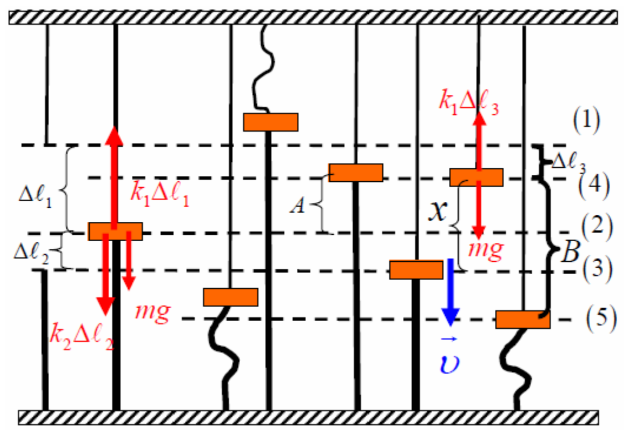
ii) Θεωρώντας δεδομένο το ότι με κατάλληλο πλάτος εκτελεί α.α.τ. με $k = k_1 + k_2 = 300\, N/m$, να υπολογίσετε το μεγαλύτερο επιτρεπόμενο πλάτος της ταλάντωσης.

iii) Ανεβάζουμε το σώμα κατά 20 cm από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε να κινηθεί. Με ποια ταχύτητα φτάνει στη θέση στην οποία το κάτω λάστιχο αποκτά το φυσικό του μήκος ;

iv) Πόσο θα μετατοπιστεί το σώμα από τη θέση που το αφήσαμε ελεύθερο;

v) Πόσο χρόνο διαρκεί η μετατόπιση αυτή;

Απάντηση:



i) Σημειώνουμε τις δυνάμεις στην αρχική θέση ισορροπίας (2).

$$k_1\Delta\ell_1 = k_2\Delta\ell_2 + mg \Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{k_1\Delta\ell_1 - mg}{k_2} = 0{,}1m$$

ii) Το σώμα δεν πρέπει να κατέβει κάτω από τη θέση (3) μια και το λάστιχο δεν «σπρώχνει».

Επίσης δεν πρέπει να ανέβει πάνω από την (1) για ανάλογο λόγο.

Το μεγαλύτερο λοιπόν πλάτος είναι ο μικρότερος από τα $\Delta\ell_1$ και $\Delta\ell_2$, δηλαδή το $\Delta\ell_2 = 0{,}1m$.

iii) Το σώμα θα «επιχειρήσει» ταλάντωση περί τη θέση (2) με πλάτος $A = 0{,}2m$. Μόλις φτάνει στην (3) έχει ταχύτητα που θα υπολογίσουμε από τη διατήρηση της ενέργειας από την θέση πλάτους στην (3).

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\Delta\ell_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{kA^2 - k\Delta\ell_2^2}{m} = 9\frac{m^2}{s^2} \Rightarrow \upsilon = 3\frac{m}{s}$$

iv) Στη θέση (3) το λάστιχο k_2 παύει να δρα οπότε το σώμα εκτελεί από εκεί και κάτω ταλάντωση με θέση ισορροπίας την (4) την οποία πρέπει να υπολογίσουμε.

$$k_1\Delta\ell_3 = mg \Rightarrow \Delta\ell_3 = \frac{mg}{k_1} = 0,1m$$

Το πλάτος της ταλάντωσης B είναι η απόσταση των θέσεων (4) και (5). Θα το βρούμε με διατήρηση ενέργειας. Η θέση στην οποία έχει ταχύτητα υ είναι $x = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 - \Delta\ell_3 = 0,3m$

$$\frac{1}{2}k_1B^2 = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow B^2 = x^2 + \frac{m}{k_1}\upsilon^2 = \left(\frac{9}{100} + \frac{9}{100}\right)\frac{m^2}{s^2} \Rightarrow B = 0,3\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

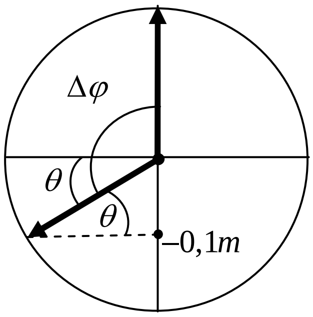
Μετατοπίζεται επομένως κατά: $B + A + \Delta\ell_2 - x = 0,3\sqrt{2}m$

Παρατήρηση:

Η θέση στην οποία αφέθηκε ελεύθερο ταυτίζεται με τη θέση ισορροπίας (4) αλλά αυτό έτυχε στην παρούσα άσκηση.

v) Η διάρκεια της μετατόπισης θα υπολογιστεί με τη βοήθεια στρεφομένων διανυσμάτων.

Πρώτα θα υπολογίσουμε τον χρόνο από τη θέση πλάτους στη θέση $\Delta\ell_2$.

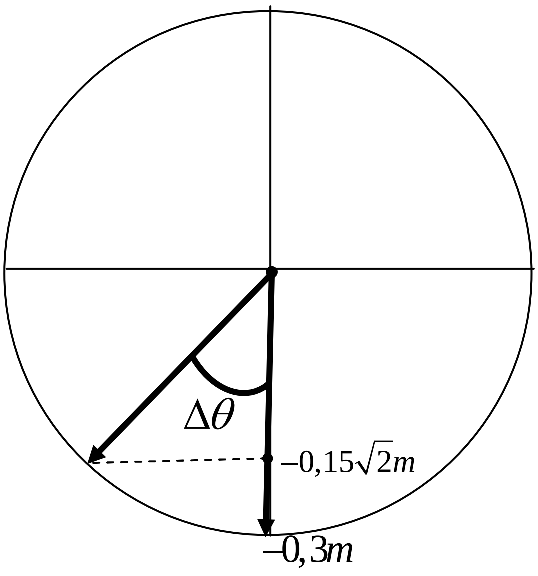


$$\eta\mu\theta = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Προφανώς:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega.\Delta t_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}.\Delta t_1 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{300}.\Delta t_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{300}}s = \frac{2\pi}{30\sqrt{3}}s$$



Κατόπιν θα υπολογίσουμε τον χρόνο από τη θέση (3) στη θέση (5). Ο χρόνος αυτός σχετίζεται με την δεύτερη ταλάντωση. Πάλι στρεφόμενο.

$$\sigma\upsilon\nu\Delta\theta = \frac{0,15\sqrt{2}}{0,3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega.\Delta t_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{k_1}{m}}.\Delta t_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{100}.\Delta t_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\pi}{40}s$$

Ο συνολικός χρόνος είναι $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \dfrac{2\pi}{30\sqrt{3}}s + \dfrac{\pi}{40}s$

Επιμέλεια

Γιάννης Κυριακόπουλος