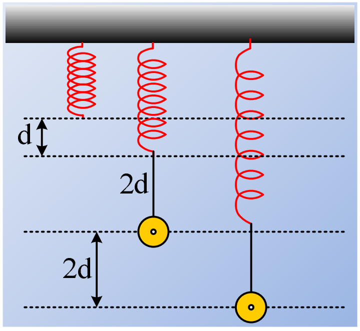
Στο άκρο ελατηρίου, μέσω νήματος.



Ένα σώμα Σ ηρεμεί όπως στο σχήμα, δεμένο στο άκρο νήματος μήκους 2d, έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά d. Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 2d και τη στιγμή t=0 το αφήνουμε να ταλαντωθεί.

i) Η απόσταση που θα διανύσει το σώμα κινούμενο προς τα πάνω είναι:

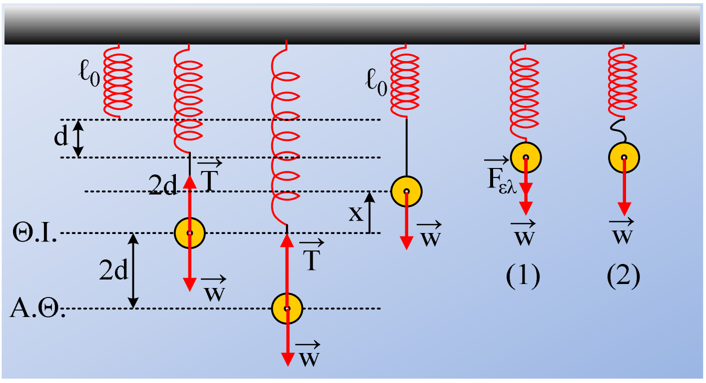
α) y<4d, β) y=4d, γ) y>4d.

ii) Η ταχύτητα του σώματος θα μηδενιστεί για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή t_1 όπου:

$$\alpha)\ t_1 < \pi\sqrt{\frac{d}{g}} \qquad \beta)\ t_1 = \pi\sqrt{\frac{d}{g}} \qquad \gamma)\ t_1 > \pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:



i) Το σώμα αρχίζει να ταλαντώνεται, γύρω από την θέση ισορροπίας, όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά d. Μόλις το σώμα βρεθεί πάνω από τη θέση ισορροπίας του κατά x=d, το ελατήριο αποκτά το φυσικό μήκος του, οπότε μηδενίζεται η τάση του νήματος, αφού παύει να είναι τεντωμένο.

Αν το σώμα ήταν δεμένο στο άκρο του ελατηρίου (σχήμα (1)), το σώμα θα επιβραδυνόταν από τη δύναμη $F_{ελ}$+w και θα σταματούσε σε απομάκρυνση x=A=2d, διανύοντας επιπλέον απόσταση d, οπότε η συνολική απόσταση που θα διένυε θα ήταν 2A=4d. Τώρα όμως (σχήμα (2)) επιβραδύνεται μόνο από το βάρος w, συνεπώς το σώμα έχοντας μικρότερη επιτάχυνση (ίση με g), θα χρειαστεί περισσότερο χρόνο επιβράδυνσης μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του, οπότε θα διανύσει και μεγαλύτερη απόσταση από d, εκτελώντας κατακόρυφη βολή. Συνεπώς η συνολική απόσταση που διανύσει θα είναι και μεγαλύτερη από 4d.

Σωστή συνεπώς είναι η γ) πρόταση.

ii) Με βάση την προηγούμενη ανάλυση και ο χρόνος κίνησης θα είναι μεγαλύτερος, από το χρόνο που θα απαιτείτο αν εκτελούσε ΑΑΤ δεμένο στο άκρο του ελατηρίου.

Αλλά στην περίπτωση της ΑΑΤ, ο χρόνος θα ήταν:

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1)$$

Όμως στη θέση ισορροπίας ΣF=0 ή T=w=mg, όπου η τάση του νήματος έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου (μπορούμε να πούμε ότι το ελατήριο ασκεί δύναμη μέτρου $k\cdot\Delta\ell=k\cdot d$ στο σώμα, μέσω του νήματος). Οπότε $k\cdot d=mg$ ή

$$\frac{m}{k} = \frac{d}{g} \quad (2)$$

και η (1) γίνεται:

$$t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

Άρα σωστή πρόταση είναι η γ) και το σώμα θα κινηθεί για χρονικό διάστημα $t_1 > \pi\sqrt{\frac{d}{g}}$ για να μηδενιστεί η ταχύτητά του

Σχόλια:

i) Το σώμα εκτελεί ΑΑΤ μέχρι τη θέση όπου βρίσκεται σε απομάκρυνση x=d, πάνω από τη θέση ισορροπίας και το ελατήριο είναι τεντωμένο. Από την ενέργεια ταλάντωσης παίρνουμε:

$$E=K+U \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}k4d^2 = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = 3\frac{1}{2}kd^2 \; (3)$$

Εξάλλου εφαρμόζοντας την αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την παραπέρα κίνηση του σώματος, μέχρι να φτάσει στο μέγιστο ύψος της βολής παίρνουμε:

$$K_\alpha+U_\alpha=K_\tau+U_\tau \text{ ή}$$

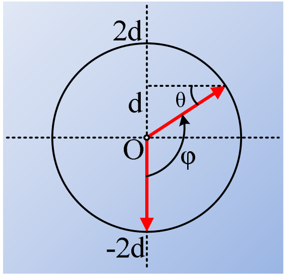
$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 = 0 + mgh \text{ ή με βάση την (3)}$$

$$3\frac{1}{2}kd^2 = mgh \rightarrow h = \frac{3kd^2}{2mg} \xrightarrow{(2)} h = 1{,}5d$$

Συνεπώς το σώμα θα κινηθεί συνολικά προς τα πάνω κατά:

$$y=2d+d+1{,}5d=4{,}5d$$

και δεν πρόκειται να συμπιέσει το ελατήριο, το οποίο στο μεταξύ, έχει αποκτήσει το φυσικό μήκος του.



ii) Με βάση τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης το χρονικό διάστημα που θα κινηθεί το σώμα με τεντωμένο το νήμα, είναι ίσο με το χρόνο, που ένα στρεφόμενο διάστημα θα διέγραφε τη γωνία φ στο διπλανό σχήμα. Αλλά η γωνία θ=30° (η απέναντι κάθετη είναι ίση με d, το μισό της υποτείνουσες 2d) συνεπώς:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} rad$$

Και ο χρόνος αυτός είναι:

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{1}{3} 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}} \quad (4)$$

Εξάλλου για την κατακόρυφη βολή έχουμε $\upsilon=\upsilon_0-gt$ ή $t_{\alpha\nu} = \frac{\upsilon_0}{g}$ αλλά από την (3) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 = 3\frac{1}{2} kd^2 \rightarrow \upsilon = \upsilon_0 = d\sqrt{\frac{3k}{m}} = d\sqrt{\frac{3g}{d}} = \sqrt{3gd}$$

Οπότε για το χρόνο ανόδου παίρνουμε:

$$t_{\alpha\nu} = \frac{\upsilon_0}{g} = \frac{\sqrt{3gd}}{g} = \sqrt{\frac{3d}{g}}$$

Συνεπώς ο συνολικός χρόνος ανόδου είναι:

$$t_{o\lambda} = \frac{1}{3} 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}} + \sqrt{\frac{3d}{g}} = \left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right)\sqrt{\frac{d}{g}}$$

Εύκολα από την σύγκριση προκύπτει ότι $t_{o\lambda} > \pi\sqrt{\frac{d}{g}}$ αφού $\sqrt{3} > \frac{\pi}{3}$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης