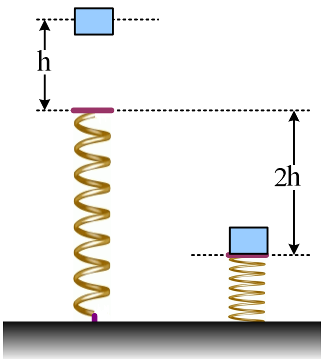
Πόσο χρόνο διαρκεί η επαφή με το ελατήριο;



Αφήνεται ένα σώμα να πέσει από ύψος h=6cm, πάνω στο ελεύθερο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται στο έδαφος. Παρατηρούμε δε, ότι προκαλεί συσπείρωση του ελατηρίου κατά 2h=12cm πριν κινηθεί ξανά προς τα πάνω.

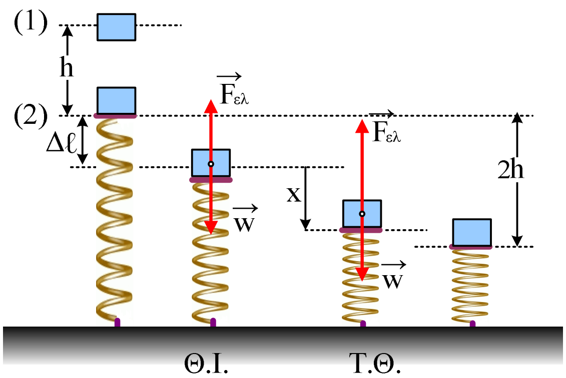
i) Να αποδείξτε ότι για όσον χρόνο το σώμα βρίσκεται σε επαφή με το ελατήριο, η κίνησή του είναι ΑΑΤ.

ii) Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης.

ii) Να υπολογιστεί ο χρόνος που το σώμα θα βρίσκεται σε επαφή, (μέχρι τη στιγμή που κινούμενο προς τα πάνω εγκαταλείπει το ελατήριο).

Δίνεται $g=10m/s^2$ και $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:



i) Στο σχήμα φαίνεται η θέση ισορροπίας όπου ΣF=0 ή $F_{ελ}=mg$ ή $k \cdot \Delta \ell = mg$ (1).

Λαμβάνοντας τώρα το σώμα στην τυχαία θέση έχουμε:

$$\Sigma F = w - F_{ελ}' = mg - k(\Delta \ell + x) = mg - k\Delta \ell - kx \xrightarrow{(1)} \Sigma F = -kx$$

Συνεπώς το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά D=k.

ii) Η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή, συνεπώς:

$$K_2 + U_2 = E \text{ ή}$$

$$\tfrac{1}{2} m\upsilon_2^2 + \tfrac{1}{2} k \cdot (\Delta \ell)^2 = \tfrac{1}{2} kA^2 \quad (2)$$

όπου η κινητική ενέργεια στη θέση (2) $\tfrac{1}{2} m\upsilon_2^2$ είναι ίση με την δυναμική ενέργεια του σώματος στη θέση (1), θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από την θέση (2). Πράγματι από ΑΔΜΕ έχουμε:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow mgh = \tfrac{1}{2} m\upsilon_2^2$$

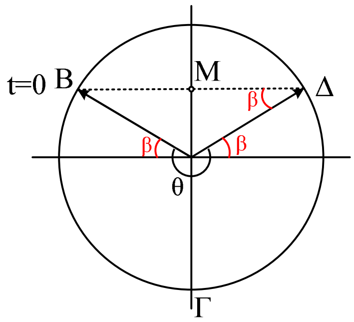
Ενώ Α= 2h-Δℓ και με αντικατάσταση στην (2) παίρνουμε:

$$mgh + \tfrac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \tfrac{1}{2}k(4h^2 - 4h\cdot\Delta\ell + \Delta\ell^2) \rightarrow$$

$$mgh = 2k\cdot h^2 - 2k\cdot h\cdot\Delta\ell \rightarrow mg = 2kh - 2k\cdot\Delta\ell \xrightarrow{(1)} mg = 2kh - 2mg \rightarrow \frac{mg}{k} = \frac{2}{3}h = \Delta\ell$$

αλλά τότε $A = 2h - \Delta\ell = \frac{4}{3}h = 8cm$.

iii) Παρατηρούμε ότι το πλάτος ταλάντωσης είναι διπλάσιο της συσπείρωσης Δℓ του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας. Παίρνοντας λοιπόν τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης, και θεωρώντας θετική την προς τα πάνω κατεύθυνση, το σώμα βρίσκεται στο Μ, σε απομάκρυνση x=4cm τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο, θα πάει στη θέση –Α=-8cm και θα επιστρέψει στη θέση +4cm. Συνεπώς το περιστρεφόμενο διάνυσμα θα διαγράψει τη γωνία θ του σχήματος, όπου για τη γωνία β έχουμε $\eta\mu\beta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ συνεπώς $\beta = \frac{\pi}{6}$ και άρα $\theta = \frac{\pi}{6} + \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} rad$



Αλλά θ=ωt → $t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\theta}{2\pi}T = \frac{\frac{4\pi}{3}}{2\pi}T = \frac{2}{3}T$, όπου Τ η περίοδος ταλάντωσης, για την οποία:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Αλλά από την σχέση (1) $\frac{m}{k} = \frac{\Delta\ell}{g}$, οπότε $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell}{g}}$ και

$$t = \frac{2}{3}T = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{4\cdot 10^{-2}}{10}}s = \frac{4\pi\cdot 0,2}{3\pi}s = \frac{4}{15}s$$

Σχόλιο:

Σε ποια θέση, το σώμα εγκαταλείπει το ελατήριο; Στην παραπάνω λύση πήραμε ότι η επαφή χάνεται στη θέση x=0,4cm, δηλαδή στη θέση που το ελατήριο αποκτά το φυσικό μήκος του. Επειδή το ελατήριο θεωρείται ιδανικό, δεχόμαστε ότι δεν έχει μάζα. Αλλά τότε μόλις αποκτά το φυσικό μήκος του, δεν δέχεται καμιά δύναμη από το σώμα που να το επιμηκύνει, ούτε πρόκειται να επιμηκυνθεί από μόνο του λόγω αδράνειας, συνεπώς παραμένει σε αυτό το μήκος, ενώ το σώμα, λόγω αδράνειας συνεχίζει την κίνησή του προς τα πάνω και η επαφή χάνεται.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης