

### Μια ταλάντωση, δυο συστήματα αναφοράς

Ένα σώμα μάζας  $m = 4 \text{ kg}$  αφήνεται ελεύθερο τη χρονική στιγμή  $t = 0$  στη θέση  $x = 0$  ενός άξονα  $x'x$  και στη συνέχεια κινείται κατά μήκος του άξονα. Αν η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης του σώματος αυτού, δίνεται από τη σχέση  $a(x) = 0,2 - x$  στο SI, με  $x \geq 0$  :

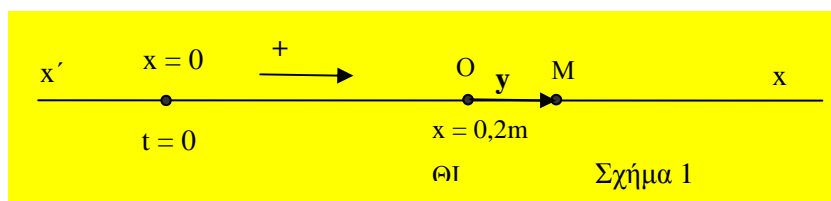
- A. Να αποδείξετε ότι το σώμα αυτό, θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, και να βρείτε την περίοδό της.
- B. Να βρείτε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
- B1. της απομάκρυνσης  $y$  από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο  $t$ ,  $y = f(t)$
- B2. της απομάκρυνσης από την θέση  $x = 0$ , σε συνάρτηση με το χρόνο  $t$ ,  $x = f(t)$
- Γ. Να υπολογίσετε την ενέργεια της ταλάντωσης.
- Δ. Να βρείτε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
- Δ1. Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ως συνάρτηση του  $x$ ,  $U = f(x)$
- Δ2. Κινητική ενέργεια ως συνάρτηση του  $x$ ,  $K = f(x)$
- Δ3. Χωρικός ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης ως συνάρτηση του  $x$ ,  $\frac{dU}{dx} = f(x)$

#### Απάντηση

A. Η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι

$$\Sigma F = ma = 4 \cdot (0,2 - x) = 0,8 - 4x, \quad x \geq 0 \quad \text{SI} \quad (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι  $0,8 - 4x = 0$  ή  $x = 0,2 \text{ m}$ , οπότε στη θέση  $x = 0,2 \text{ m}$  είναι  $\Sigma F = 0$ , άρα εκεί είναι το σημείο ισορροπίας. Έστω  $O$  το σημείο αυτό - στο σχήμα 1.



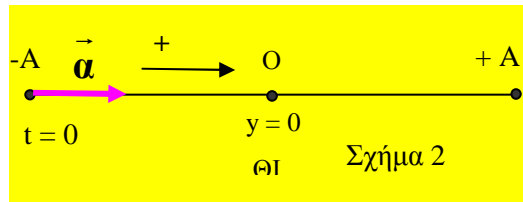
Έστω τώρα τυχαίο σημείο  $M$  στη θέση  $x_M = 0,2 + y$ , όπου  $y$  η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας. Από την (1) έχουμε :

$$\Sigma F = 0,8 - 4(0,2 + y) = -4 \cdot y,$$

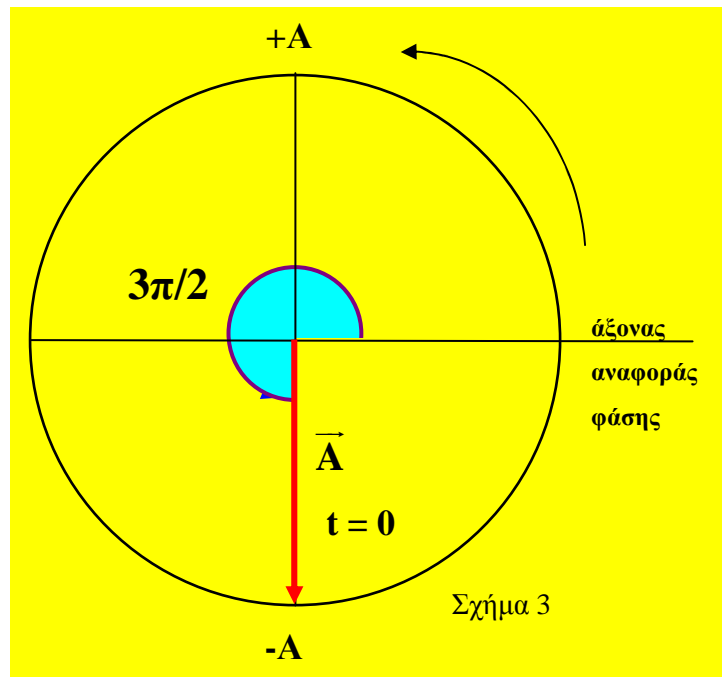
δηλαδή η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης των δυνάμεων στη διεύθυνση της κίνησης είναι **ανάλογη της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας**, άρα το σώμα κάνει **απλή αρμονική ταλάντωση** με σταθερά επαναφοράς  $D = 4 \text{ N/m}$ .

Η περίοδος της ταλάντωσης αυτής είναι  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{4}} \text{ s} = 2\pi \text{ s}$ .

B. B1. Αν  $y$  η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του  $O$ , τότε, επειδή όταν αρχίζει η ταλάντωση ( $t = 0$ ), ηρεμεί στιγμιαία, έχει απομάκρυνση  $y = -0,2 \text{ m}$ , με βάση και τη φορά της αρχικής επιτάχυνσης που θεωρείται θετική - σχήμα 2.



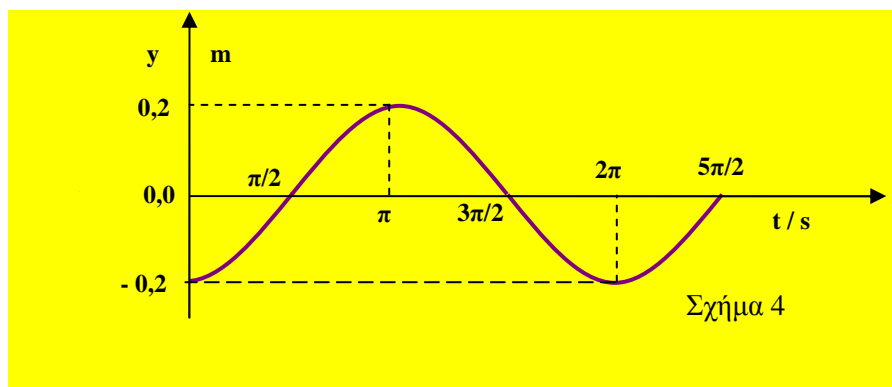
Έτσι την χρονική στιγμή  $t = 0$ , βρίσκεται σε θέση πλάτους και το στρεφόμενο διάνυσμα  $\vec{A}$  θα είναι στη θέση που φαίνεται στο σχήμα 3.



Η εξίσωση  $y = f(t)$  έχει τη μορφή  $y = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$  με  $A = 0,2 \text{ m}$ ,  $\omega = 2\pi/T = 1 \text{ rad/s}$  και  $\phi_0 = 3\pi/2 \text{ rad}$ ,

δηλαδή  $y = 0,2 \cdot \eta\mu\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ SI}$  (2).

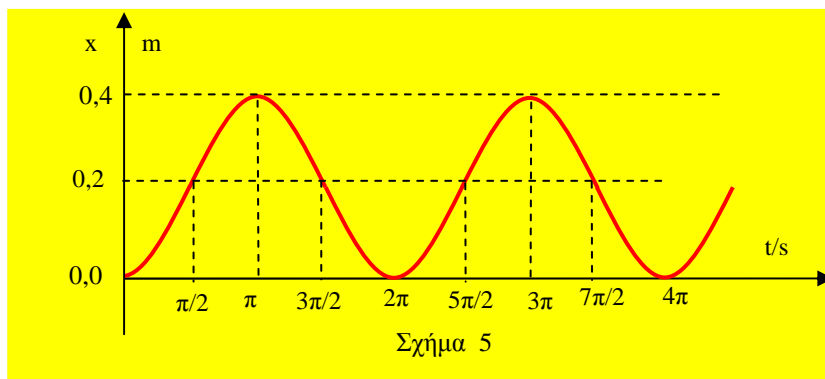
Η γραφική παράσταση της (2) φαίνεται στο σχήμα 4



B2. Η θέση  $x$  είναι  $x = 0,2 + y$  και με βάση τη (2)

$$\mathbf{x = 0,2 + 0,2 \cdot \eta\mu\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (SI) (3)}}$$

Η γραφική παράσταση της (3) φαίνεται στο σχήμα 5.

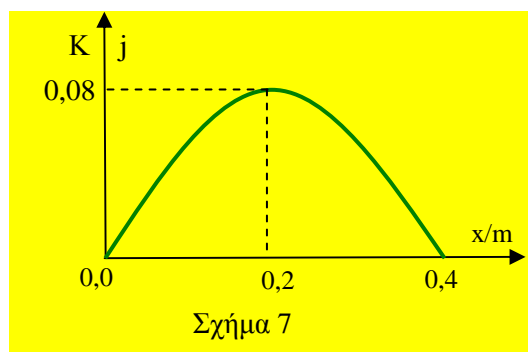
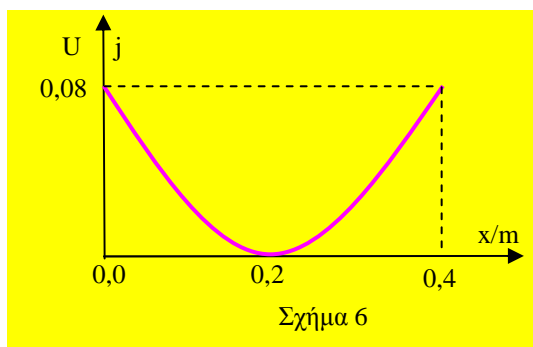


Γ. Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι  $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,2^2 \text{ j} = 0,08 \text{ j}$

Δ1. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι  $U = \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (x - 0,2)^2$  ή  $U = 2(x - 0,2)^2$  ή

$$\mathbf{U = 2x^2 - 0,8x + 0,08 \text{ SI} , 0 \leq x \leq 0,4 \text{ m} \text{ (4)}}$$

Η γραφική παράσταση της (4) είναι το τμήμα παραβολής που φαίνεται στο σχήμα 6.



Δ2. Με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$K + U = E \text{ ή } K = E - U \text{ ή } K = 0,08 - 2x^2 + 0,8x - 0,08 \text{ ή}$$

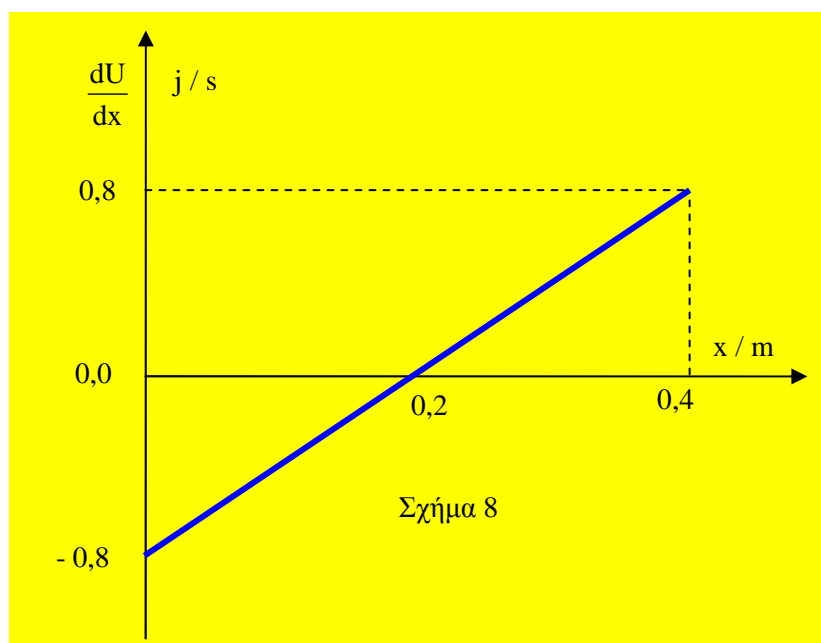
$$\mathbf{K = -2x^2 + 0,8x , \text{ στο SI με } 0 \leq x \leq 0,4 \text{ m} \text{ (5)}}$$

Η γραφική παράσταση της (5) είναι το τμήμα παραβολής που φαίνεται στο σχήμα 7

Δ3. Από την (4) με παραγωγή έχουμε ότι  $\frac{dU}{dt} = 2 \cdot 2x - 0,8$  ή

$$\frac{dU}{dt} = 4x - 0,8 \text{ (SI) , } 0 \leq x \leq 0,4\text{m (6)}$$

Η γραφική παράσταση της (6) φαίνεται στο σχήμα (8)



### Σχόλιο

Συγκρίνοντας τις (1) και (6) παρατηρούμε ότι  $\frac{dU}{dx} = -\Sigma F$ , πράγμα αναμενόμενο διότι η στοιχειώδης με-

ταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι  $dU = -dW_{\Sigma F}$  ή  $dU = -\Sigma F \cdot dx$  ή  $\frac{dU}{dx} = -\Sigma F$

### Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

*Μανώλης Δρακάκης*