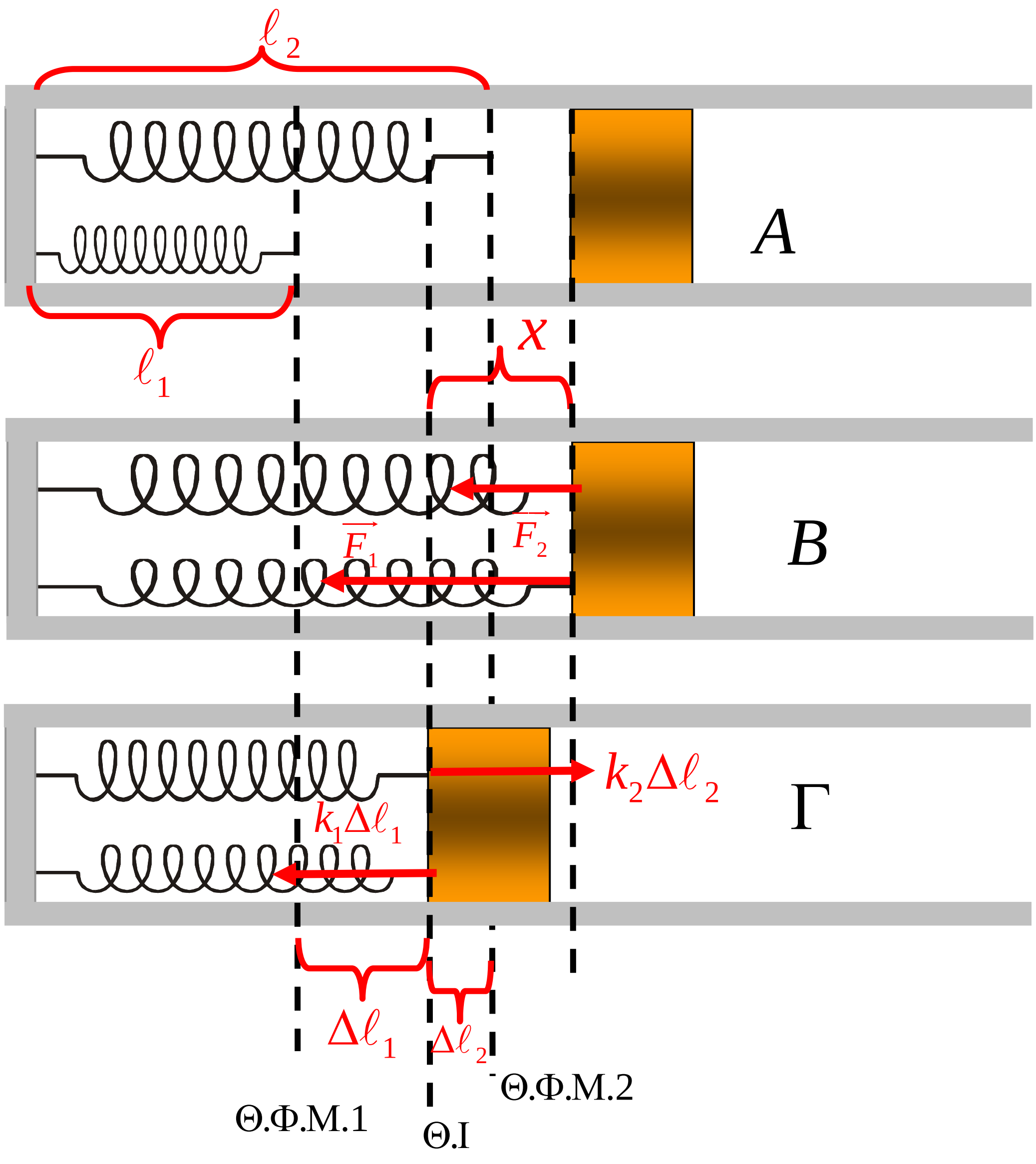
Δύο ελατήρια με διαφορετικό αρχικό μήκος.

Δύο αβαρή ,ιδανικά, οριζόντια ελατήρια 1 και 2 έχουν φυσικά μήκη $\ell_1 = 0,6m$ και $\ell_2 = 1m$ και σταθερές $k_1 = 100\,{}^{N}\!/_{m}$ και $k_2 = 300\,{}^{N}\!/_{m}$.Το σώμα του σχήματος , μάζας $m = 4kg$, κινείται χωρίς τριβές στον οριζόντιο σωλήνα. Στερεώνονται τα ελατήρια πάνω σ' αυτό, το εκτρέπουμε ώστε να απέχει $1,1m$ από το σημείο πρόσδεσης των ελατηρίων και το αφήνουμε να κινηθεί.



i) Προσδιορίσατε τη θέση στην οποία το σώμα ισορροπεί και αποδείξατε ότι θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

ii) Γράψτε την εξίσωση θέσης συναρτήσει του χρόνου. Χρονική στιγμή μηδέν αυτή που το αφήνουμε και θετική φορά η προς τα δεξιά.

iii) Ποια χρονική στιγμή το ελατήριο 2 αποκτά για πρώτη φορά το φυσικό του μήκος;

iv) Πόση είναι τη στιγμή εκείνη η ταχύτητα του σώματος;

v) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια κάθε ελατηρίου τη στιγμή εκείνη;

vi) Να γραφούν οι εξισώσεις των δυναμικών ενεργειών των ελατηρίων συναρτήσει του χρόνου.

vii) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση του ερωτήματος 3 ;

Απάντηση:

i) Η θέση ισορροπίας βρίσκεται ανάμεσα στις θέσεις φυσικών μηκών ώστε το ελατήριο 1 να είναι τεντωμένο και το 2 συσπειρωμένο. Εκεί:

$$k_1\Delta\ell_1 = k_2\Delta\ell_2 \Rightarrow 100\Delta\ell_1 = 300\Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\ell_1 = 3\Delta\ell_2 \quad (1)$$

Φαίνεται από το σχήμα ότι $\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = \ell_2 - \ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = 0{,}4m \quad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0{,}3m \quad , \quad \Delta\ell_2 = 0{,}1m$$

Σε μια τυχαία θέση απέχει x από τη θέση ισορροπίας (σχ.Β).Εκεί:

$$\sum F = F_1 + F_2 = -k_1\left(\Delta\ell_1 + x\right) - k_2\left(x - \Delta\ell_2\right) = -k_1\Delta\ell_1 - k_1x - k_2x + k_2\Delta\ell_2$$

Επειδή $k_1\Delta\ell_1 = k_2\Delta\ell_2$ έχουμε ότι $\sum F = -\left(k_1 + k_2\right)x$

Εκτελεί επομένως ταλάντωση περί τη θέση ισορροπίας που υπολογίσαμε με γωνιακή συχνότητα:

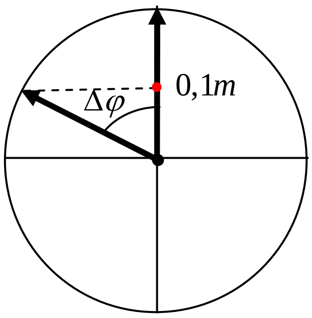
$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = 10\,{}^{rad}\!/_{s}$$

Το πλάτος είναι $A = 1{,}1m - \ell_2 + \Delta\ell_2 = 1{,}m - 1m + 0{,}1m = 0{,}2m$.

ii) Τη χρονική στιγμή μηδέν βρίσκεται στη θέση πλάτους δηλαδή

$$x = A \Rightarrow A\eta\mu\left(\omega.0 + \varphi_o\right) = A \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = 1 \Rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{2}$$

Η εξίσωση θέσης είναι $x = A\eta\mu\left(\omega.t + \varphi_o\right) = 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad$ (S.I)



iii) Τη στιγμή αυτή , όπως δείχνει το σχήμα $x = 0{,}1m$ Ο υπολογισμός θα γίνει με στρεφόμενο.

$$\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi = \frac{0{,}1}{0{,}2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$$

Προφανώς:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega.t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{100}.t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{30}s$$

iv) Η ταχύτητα θα υπολογιστεί με επίκληση της διατήρησης της ενέργειας.

$$U + K = E \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \frac{D}{m}A^2 = \frac{D}{m}x^2 + \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = 100\left(\frac{4}{100} - \frac{1}{100}\right) \Rightarrow \upsilon = -\sqrt{3}\,{}^{m}\!/_{s}$$, το μείον διότι κινείται αριστερά.

v) Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας κάθε ελατηρίου είναι αντίθετη του έργου της δύναμης του ελατηρίου δηλαδή:

$$dU_{\varepsilon\lambda} = -F_{\varepsilon\lambda}dx \Rightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = \frac{-F_{\varepsilon\lambda}dx}{dt} \Rightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -F_{\varepsilon\lambda}.\upsilon$$

Στη θέση στην οποία αναφερόμαστε το ελατήριο 2 έχει το φυσικό του μήκος οπότε η δύναμη του ελατηρίου είναι μηδέν και επομένως $\frac{dU_{\varepsilon\lambda 2}}{dt} = 0$.

Στην ίδια θέση το ελατήριο 1 είναι τεντωμένο κατά $\ell_2 - \ell_1 = 0,4m$, οπότε

$$F_{\varepsilon\lambda 1} = -k_2\left(\ell_2 - \ell_1\right) = -300\frac{N}{m}0,4m = -120N .$$

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειάς του είναι

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda 1}}{dt} = -F_{\varepsilon\lambda 1}.\upsilon = -\left(-120N\right)\left(-\sqrt{3}\frac{m}{s}\right) = -120\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

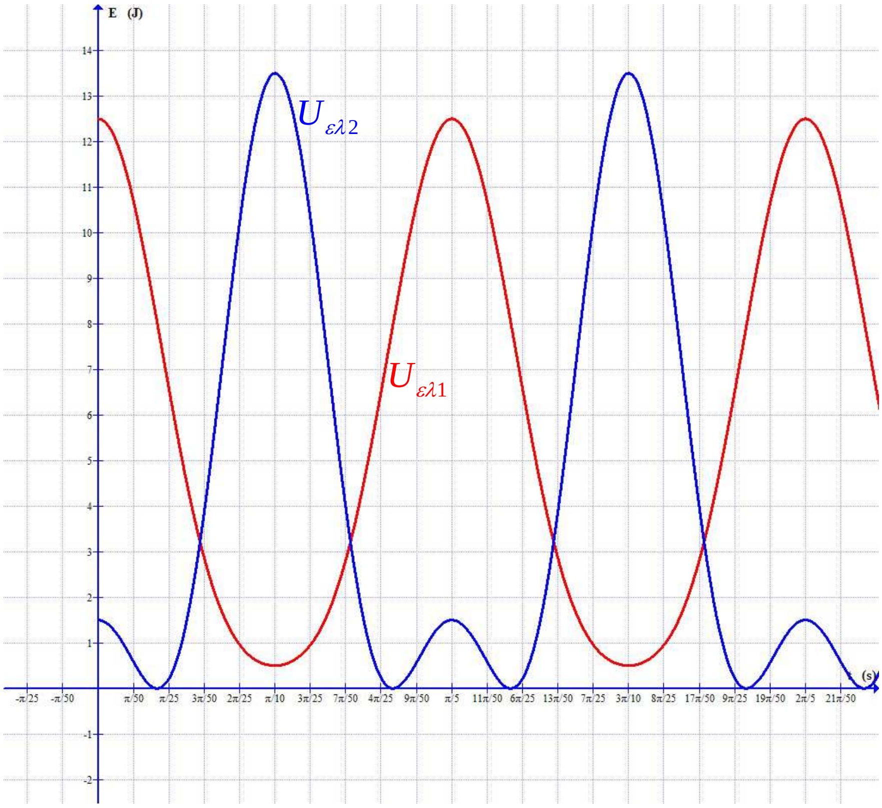
Η ενέργειά του μειώνεται μια και μειώνεται η παραμόρφωσή του.

vi) $$U_{\varepsilon\lambda 1} = \frac{1}{2}k_1\left(\Delta\ell_1 + x\right)^2 = 50\left[0,3 + 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 \quad \text{(S.I)}$$

$$U_{\varepsilon\lambda 2} = \frac{1}{2}k_2\left(x - \Delta\ell_2\right)^2 = 150\left[0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) - 0,1\right]^2 \quad \text{(S.I)}$$

<u>Εκτός ζητουμένων:</u>

Δεν είναι εύκολη η γραφική παράσταση οιασδήποτε των ανωτέρω σε ώρα εξετάσεων αλλά με τη βοήθεια του graph …



vii) $$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{\left(\sum F\right)dx}{dt} = \left(\sum F\right)\upsilon = -Dx\upsilon = -400\frac{1}{10}\left(-\sqrt{3}\right)\frac{J}{s} = 40\sqrt{3}\,\frac{J}{s}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Γιάννης Κυριακόπουλος