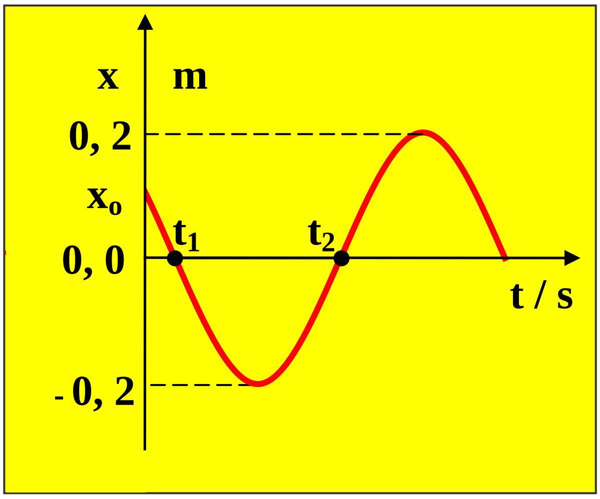
Διάγραμμα απομάκρυνσης – χρόνου, εξισώσεις κίνησης και αρχικές τιμές



Το ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου είναι ακλόνητο. Στο άλλο άκρο του , είναι δεμένο σώμα μάζας m = 1 kg, το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σταθερού πλάτους. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο όπου $t_1 = \pi/72$ s και $t_2 = 7\pi/72$ s .
Να βρεθούν:

1. Η συνάρτηση απομάκρυνσης - χρόνου x = f(t)
2. Η συνάρτηση ταχύτητας – χρόνου υ = f(t) και να παρασταθεί γραφικά.
3. Η αρχική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου
4. Η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος.

Απάντηση

1. Η εξίσωση απομάκρυνσης χρόνου είναι $x = A\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$ (1).

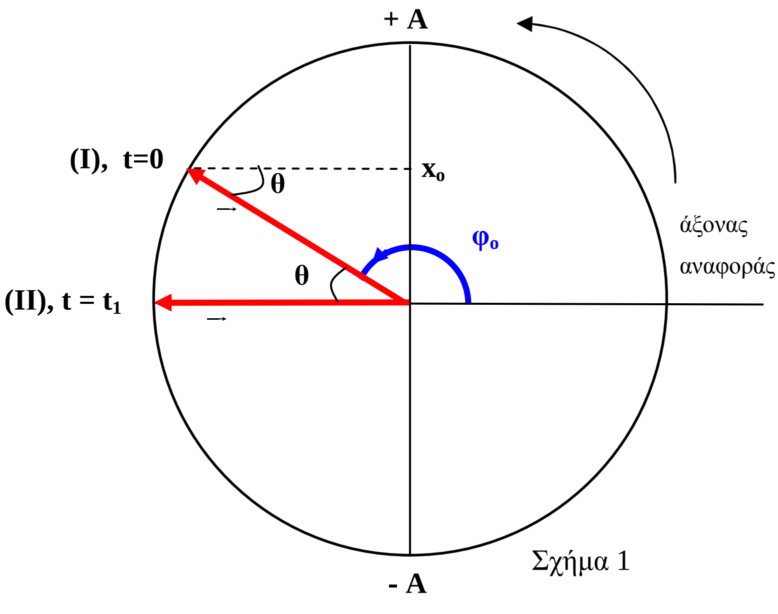
Από το διάγραμμα που δίνεται προκύπτουν τα παρακάτω:

☞ $t_2 - t_1 = \frac{T}{2}$ ή $\frac{7\pi}{72}s - \frac{\pi}{72}s = \frac{T}{2}$ άρα $T = \frac{\pi}{6}s$ και επειδή $\omega = \frac{2\pi}{T}$ θα είναι ω = 12 rad/s (2) .

☞ $x_{max} = A = 0{,}2$ m (3)

☞ Τη χρονική στιγμή t = 0 η απομάκρυνση είναι $x = x_o > 0$, και αμέσως μετά ελαττώνεται για να μηδενιστεί λίγο αργότερα τη χρονική στιγμή t_1.

Αυτό σημαίνει ότι, το κινητό βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα κατευθυνόμενο προς τη θέση ισορροπίας του και το περιστρεφόμενο διάνυσμα $\vec{A}$ βρίσκεται τη χρονική στιγμή t_1 στη θέση (I) του κύκλου αναφοράς της ταλάντωσης όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1

☞ Τη χρονική στιγμή t_1 , το κινητό φτάνει στη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά , και το διάνυσμα $\vec{A}$, έχει διαγράψει γωνία θ με $\theta = \omega t_1$ και με βάση την (2) θ = π/6 rad , άρα όπως προκύπτει από το σχήμα 1 $\varphi_o = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ rad (4)

Τελικά η (1) με βάση τις (3) , (4) γράφεται έτσι

$$\mathbf{x = 0,2\eta\mu\left(12t + \frac{5\pi}{6}\right)\ SI} \quad (5)$$

2. Η συνάρτηση ταχύτητας – χρόνου έχει τη μορφή $\upsilon = A\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o)$ και με βάση τις (2) , (3), (4) :

$$\mathbf{\upsilon = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12t + \frac{5\pi}{6}\right)\ SI} \quad (6)$$

Από την (6) :

Για $t = 0$ έχομε $\upsilon = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12\cdot 0 + \frac{5\pi}{6}\right)\frac{m}{s} = -1,2\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$

Για $t = t_1 = \pi/72$ s έχομε $\upsilon = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12\cdot\frac{\pi}{72} + \frac{5\pi}{6}\right)\frac{m}{s} = -2,4\frac{m}{s}$

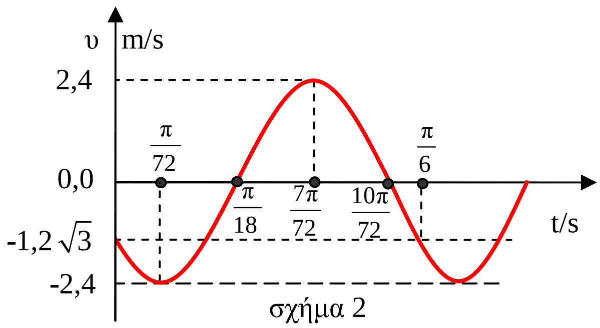
Για $t = t_1 + T/4 = \pi/18$ s έχομε $\upsilon = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12\cdot\frac{\pi}{18} + \frac{5\pi}{6}\right)\frac{m}{s} = 0$

Για $t = t_2 = 7\pi/72$ s έχομε $\upsilon = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12\cdot\frac{7\pi}{72} + \frac{5\pi}{6}\right)\frac{m}{s} = +2,4\frac{m}{s}$

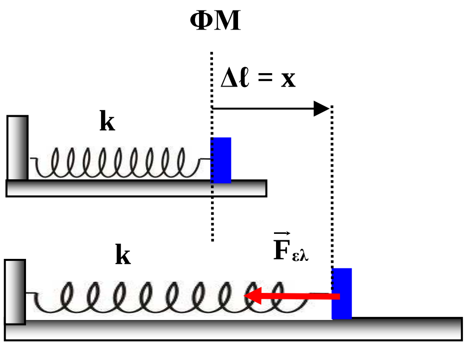
Για $t = t_2 + T/4 = 10\pi/72$ s έχομε $\upsilon = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12\cdot\frac{10\pi}{72} + \frac{5\pi}{6}\right)\frac{m}{s} = 0$

Για $t = T = \pi/6$ s έχομε $\upsilon = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right)\frac{m}{s} = -1,2\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$

Με βάση τα παραπάνω σχεδιάζομε τη γραφική παράσταση της (6) όπως φαίνεται στο σχήμα 2.



σχήμα 2



σχήμα 3

3. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$U_{\varepsilon\lambda} = \tfrac{1}{2}k\cdot\Delta\ell^2$$

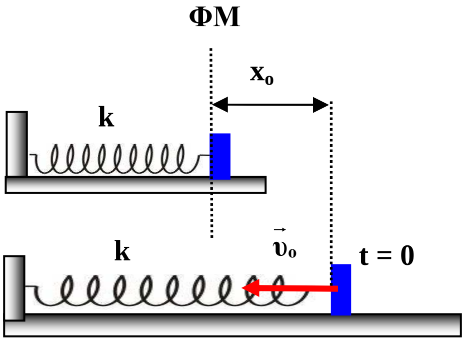
όπου $\Delta\ell$ η παραμόρφωση του ελατηρίου.

Όμως, η μόνη δύναμη που δέχεται το σώμα στην διεύθυνση της κίνησής του πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο είναι η δύναμη από το ελατήριο - σχήμα 3 –

δηλαδή $\vec{F}_{o\lambda} = \vec{F}_{\varepsilon\lambda}$, ή $F_{o\lambda} = -k\cdot\Delta\ell$.

Έτσι , στο σημείο του φυσικού μήκους του ελατηρίου όπου είναι

$\Delta\ell = 0$, είναι και $\vec{F}_{ολ} = \vec{0}$, άρα εκεί είναι το κέντρο της ταλάντωσης , η παραμόρφωση $\Delta\ell$ του ελατηρίου συμπίπτει με την απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας του ($\Delta\ell = x$) , και $F_{ολ} = -k\cdot x$, δηλαδή έχει την μορφή $F_{ολ} = -D\cdot x$ και D = k.



σχήμα 4

Άρα $½k\cdot\Delta\ell^2 = ½D\cdot x^2$ ή $U_{ελ} = U_{ταλ}$ και

$$U_{ελ,αρχ} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2_{αρχ} = \frac{1}{2}kx_o^2 \quad (7)$$ - σχήμα 4.

Επιστρέφουμε στο σχήμα 1 κι έχουμε ότι

$x_o = A\cdot ημθ = 0{,}2\cdot 0{,}5$ m = 0,1 m (8)

Κι επειδή $k = mω^2$ με βάση την (2) έχουμε ότι

k = 144N/m (9)

Από την (7) με βάση τις (8) και (9) έχουμε

$\mathbf{U_{ελ,αρχ} = 0{,}72\ j}$

4. Επειδή $U_{ελ} = U_{ταλ}$ θα είναι και $U_{ελ,αρχ} = U_{ταλ,αρχ} = 0{,}72$ j.

Με βάση τώρα την αρχή της διατήρησης της ενέργειας (ΑΔΕ) έχομε ότι

$K_{αρχ} + U_{ταλ,\ αρχ} = ½k\cdot A^2$ από την οποία προκύπτει ότι $\mathbf{K_{αρχ} = 2{,}16\ j}$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης