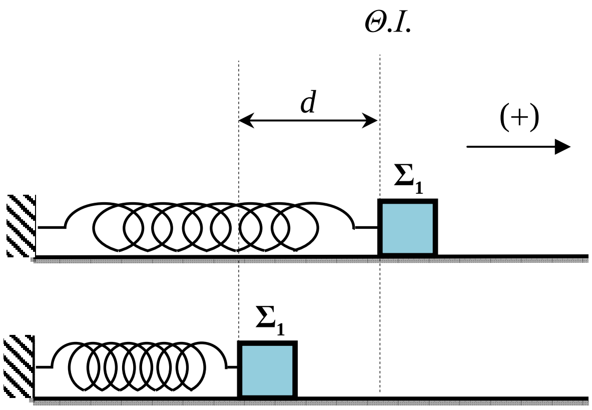
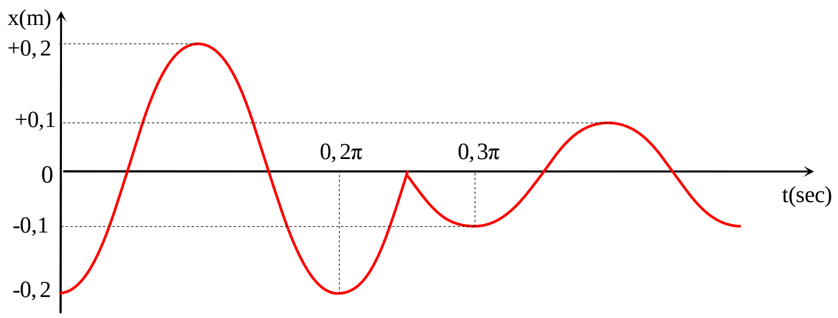
Α.Α.Τ. και κρούση

Σώμα Σ_1 μάζας m_1=1Kgr είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K, η άλλη άκρη του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένη σε κατακόρυφο τοίχο. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος. Εκτρέπουμε το Σ_1 κατά απόσταση d όπως φαίνεται στο σχήμα και την χρονική στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο.



Κάποια στιγμή και ενώ το Σ_1 εκτελεί την ταλάντωσή του, τοποθετείται (χωρίς αρχική ταχύτητα) σώμα Σ_2 μάζας m_2=3Kgr στη διεύθυνση κίνησης του Σ_1 και ακολουθεί κεντρική κρούση, η διάρκεια της οποίας θεωρείται αμελητέα. Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για το Σ_1 φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



i) Να βρεθεί η σταθερά του ελατηρίου.
ii) Να βρεθεί η τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 πριν και μετά την κρούση.
iii) Να διερευνήσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή ανελαστική.
iv) Για ποια άλλη τιμή της μάζας του Σ_2 η ολική ενέργεια της ταλάντωσης του Σ_1 μετά την κρούση του με το Σ_2 είναι η ίδια;
v) Ποια η απόσταση των δύο σωμάτων όταν το μέτρο της ταχύτητας του Σ_1 γίνει ίσο με $\upsilon_1=\upsilon_{max}\sqrt{3}/2$ για δεύτερη φορά μετά την κρούση;

$g=10m/s^2$

Απάντηση:

i) Από την γραφική παράσταση βλέπουμε ότι η περίοδος ταλάντωσης είναι T=0,2π sec, συνεπώς

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\,{}^{rad}\!/_{sec}$$

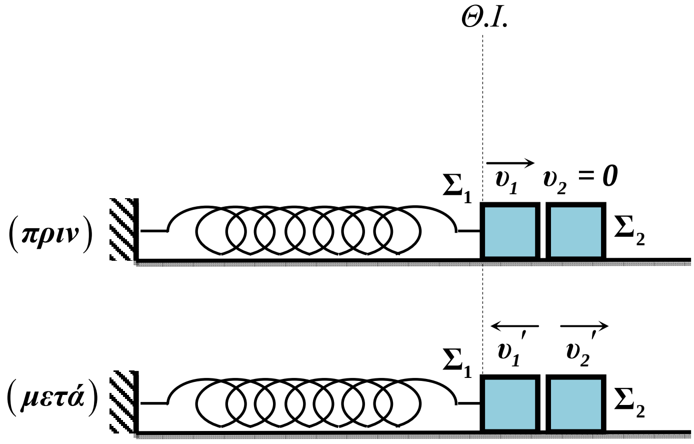
Για τη σταθερά ελατηρίου έχουμε

$$K = m_1\omega^2 \Rightarrow \boxed{K = 100\,{}^{N}\!/_{m}}$$

ii) Η κρούση έγινε στη θέση ισορροπίας του Σ_1. Η θέση ισορροπίας δεν άλλαξε εξαιτίας της κρούσης. Συνεπώς για το μέτρο της ταχύτητας έχουμε:

$$\upsilon_1 = \upsilon_{max} = \omega \cdot A = 10 \cdot 0,2 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = 2\,{}^{m}\!/_{sec}}$$

$$\upsilon_1' = \upsilon_{max}' = \omega \cdot A' = 10 \cdot 0,1 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1' = 1\,{}^{m}\!/_{sec}}$$



iii) Αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.):

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \Rightarrow m_1\upsilon_1 = -m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \Rightarrow 1\cdot 2 = -1\cdot 1 + 3\cdot\upsilon_2' \Rightarrow \upsilon_2' = 1\,{}^{m}\!/_{sec}$$

Για να αποδείξω ότι η κρούση είναι ελαστική συγκρίνω τις κινητικές ενέργειες του συστήματος πριν και μετά την κρούση. Έχω:

$$K_{\text{ολ(πριν)}} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = 2J$$

$$K_{\text{ολ(μετά)}} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = 2J$$

Άρα η κρούση είναι ελαστική.

iv) Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης του Σ_1 μετά την κρούση του με το Σ_2 είναι η ίδια αρκεί να μην αλλάξει το πλάτος της ταλάντωσης και επομένως η μέγιστη ταχύτητα του Σ_1 μετά την κρούση. Αυτό μπορεί να γίνει και όταν το Σ_1 μετά την κρούση εξακολουθεί να κινείται προς την ίδια φορά (αν έχει μεγαλύτερη μάζα από το Σ_2) και αφού η κρούση είναι ελαστική τότε

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow 1 = \frac{1 - m_2}{1 + m_2}\cdot 2 \Rightarrow \boxed{m_2 = \frac{1}{3}Kgr}$$

v) Από διατήρηση ενέργειας της ταλάντωσης για τη θέση όπου $\upsilon = \upsilon_{max}\sqrt{3}/2$ έχουμε:

$$E_{ολ} = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_{max} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}Kx_1^2 \Rightarrow m_1\upsilon'^2_{max} = m_1\left(\frac{\upsilon'_{max}\sqrt{3}}{2}\right)^2 + m_1\omega^2x_1^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon'^2_{max} = \frac{3\upsilon'^2_{max}}{4} + \omega^2x_1^2 \Rightarrow \frac{\upsilon'^2_{max}}{4} = \omega^2x_1^2 \Rightarrow \frac{\omega^2A'^2}{4} = \omega^2x_1^2 \Rightarrow \boxed{x_1 = \pm\frac{A'}{2}}$$

Μετά την κρούση το $Σ_1$ κινείται προς την θέση –Α, οπότε η ταχύτητα του θα ναι ίση με $\upsilon_{max}\sqrt{3}/2$ για δεύτερη φορά στη θέση x_1=-Α΄/2 κινούμενο προς τη Θ.Ι.. Αν θεωρήσουμε t=0 τη στιγμή της κρούσης και θετική φορά προς τα δεξιά για τη ταλάντωση του $Σ_1$ μετά τη κρούση, για το χρόνο του $Σ_1$ μέχρι τη θέση x_1=-Α΄/2 για δεύτερη φορά έχουμε:

$$x = A'ημ(\omega t + \pi) \overset{x=-\frac{A'}{2}}{\Rightarrow} -\frac{A'}{2} = A'ημ(\omega t + \pi) \Rightarrow ημ(\omega t + \pi) = -\frac{1}{2} \overset{\omega=10rad/sec}{\Rightarrow}$$

$$10t + \pi = 2κ\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow 10t = 2κ\pi - \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \boxed{t = \frac{κ\pi}{5} - \frac{7\pi}{60}} \quad (1)$$

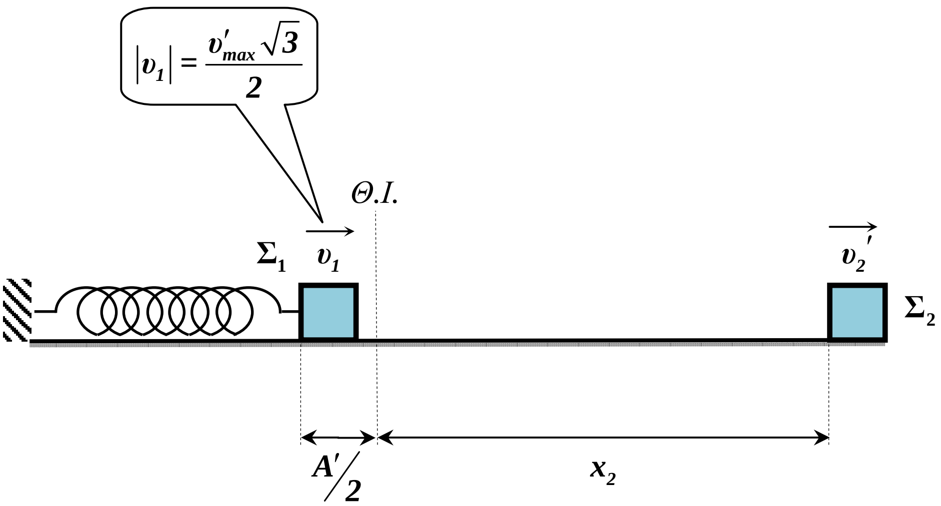
$$ή \;\; 10t + \pi = 2κ\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow 10t = 2κ\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{t = \frac{κ\pi}{5} + \frac{\pi}{60}} \quad (2)$$

Η (1) για κ=1 δίνει τον ζητούμενο χρόνο t_1=π/12 sec. Στο χρόνο αυτό ο $Σ_2$ θα χει διανύσει απόσταση

$$x_2 = \upsilon'_2 \cdot t_1 \Rightarrow x_2 = 1\cdot\frac{\pi}{12} \Rightarrow x_2 = 0{,}26m$$

Άρα η απόσταση των δύο σωμάτων θα είναι

$$d = \frac{A'}{2} + x_2 = 0{,}05 + 0{,}26 \Rightarrow \boxed{d \simeq 0{,}31m}$$



Επιμέλεια

Κώστας Παρασύρης