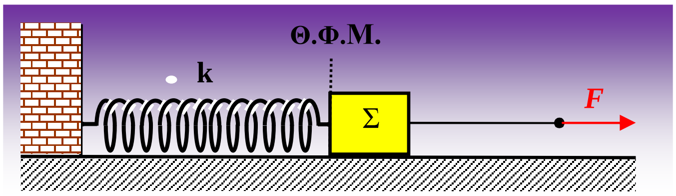
Αρμονική ταλάντωση που μετατρέπεται σε φθίνουσα



Ένα σώμα Σ μάζας **m=2kg** είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς **k=50N/m**, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Αρχικά το σώμα ισορροπεί ακίνητο πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος **l_o=0,5m**. Στο σώμα έχουμε δέσει μη εκτατό αβαρές νήμα που έχει όριο θραύσεως T_{max}. Ασκούμε στο άλλο άκρο του νήματος κατάλληλη οριζόντια δύναμη , οπότε το σώμα αρχίζει να μετακινείται από τη θέση ισορροπίας του με σταθερή επιτάχυνση μέτρου **$7{,}5m/s^2$** και κάποια στιγμή, που τη θεωρούμε ως t=0, το ελατήριο έχει μήκος **l_1=0,7m** και το νήμα σπάει.

α) Να υπολογίσετε το όριο θραύσεως του νήματος.

β) Για την κίνηση του σώματος μετά το σπάσιμο του νήματος, να υπολογίσετε:

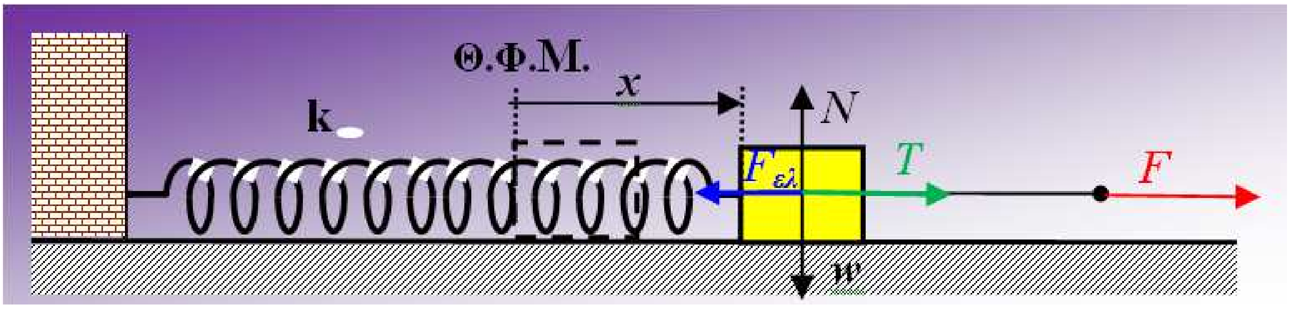
- **i)** την ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ
- **ii)** την χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σώματος Σ, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά
- **iii)** το χρονικό διάστημα στη διάρκεια μίας περιόδου στο οποίο ισχύει K≤3U
- **iv)** το έργο της δύναμης επαναφοράς από τη χρονική στιγμή t=0 έως τη χρονική στιγμή που το ελατήριο βρίσκεται για $1^η$ φορά στην κατάσταση μέγιστης επιμήκυνσής του.

γ) Την χρονική στιγμή $t_1=\frac{7T}{6}$, στο σώμα αρχίζει να ενεργεί δύναμη αντίστασης της μορφής $F_{αντ}=-b\cdot u$, όπου b θετική σταθερά, με αποτέλεσμα η ταλάντωση να μετατρέπεται σε φθίνουσα. Κάποια στιγμή t_2 όπου το ελατήριο έχει μήκος **0,8m** το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου **1m/s** και επιταχύνεται με ρυθμό **$7{,}1m/s^2$** ενώ την στιγμή t_3 το μέτρο της ταχύτητας είναι κατά 25% μεγαλύτερο του μέτρου της την στιγμή t_2, παίρνοντας έτσι την μέγιστη τιμή του για $1^η$ φορά μετά την επίδραση της δύναμης αντίστασης (με την έννοια του τοπικού ακρότατου). Να υπολογιστούν:

- **i)** η απώλεια μηχανικής ενέργειας στην χρονική διάρκεια $Δt=t_2-t_1$,
- **ii)** η τιμή της σταθεράς b,
- **iii)** η απομάκρυνση του σώματος από την θέση x=0 την χρονική στιγμή t_3.

Λύση:

α) Η δύναμη F που ασκείται από τον εξωτερικό παράγοντα στο δεξιό άκρο του νήματος ισούται με την δύναμη(τάση) Τα που ασκεί το νήμα στο σώμα. Την στιγμή που το νήμα κόβεται η τάση του νήματος παίρνει την μέγιστη τιμή της $T=T_{max}$ και η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $Δl=l_1-l_o$=0,2m , οπότε:



$$\Sigma F = ma \Rightarrow T_{max} - F_{\varepsilon\lambda} = ma \Rightarrow T_{max} = F_{\varepsilon\lambda} + ma = k\Delta l + ma = 50 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 7{,}5$$

$$\boldsymbol{T_{max}=25N}$$

β) Για την κίνηση του σώματος ισχύει

$$s = \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

απ' όπου προκύπτει

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2S}{a}}$$

Οπότε η ταχύτητα του σώματος την στιγμή που σπάει το νήμα είναι

$$u = a \cdot \Delta t = a \cdot \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}2} \Rightarrow u = \sqrt{3}m/s$$

Οπότε εφαρμόζοντας την ΑΔΕΤ για την στιγμή της κρούσης έχουμε

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DxA^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = \sqrt{x^2 + \frac{m}{D}u^2} \Rightarrow$$
$$A = 0{,}4m$$

Μετά το κόψιμο του νήματος, το σώμα Σ εκτελεί α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς D=k=100N/m. Η θέση ισορροπίας(x=0) ταυτίζεται με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, διότι στη θέση αυτή μηδενίζεται η συνισταμένη δύναμη(δύναμη ελατηρίου) που ενεργεί στο σώμα.

Η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0{,}4^2 \Rightarrow \boxed{E = 4J}$$

ii) Την t=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση x=+0,2m, οπότε η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης θα είναι:

$$x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$$

Για t=0 έχουμε:

$$0{,}2 = 0{,}4\eta\mu\varphi_o \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{0\le\varphi_o<2\pi} \varphi_o = \frac{\pi}{6}rad \text{ ή } \varphi_o = \frac{5\pi}{6}rad$$

Επειδή το σώμα αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος κινείται προς τα δεξιά, δηλαδή προς τη θετική κατεύθυνση, δεκτή θα είναι εκείνη η τιμή της αρχικής φάσης που ικανοποιεί την απαίτηση u>0, δηλαδή συνφ_o>0. Άρα: $\varphi_o = \frac{\pi}{6} rad$.

Η γωνιακή συχνότητα είναι: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{2}} \Rightarrow \omega = 5 rad/s$

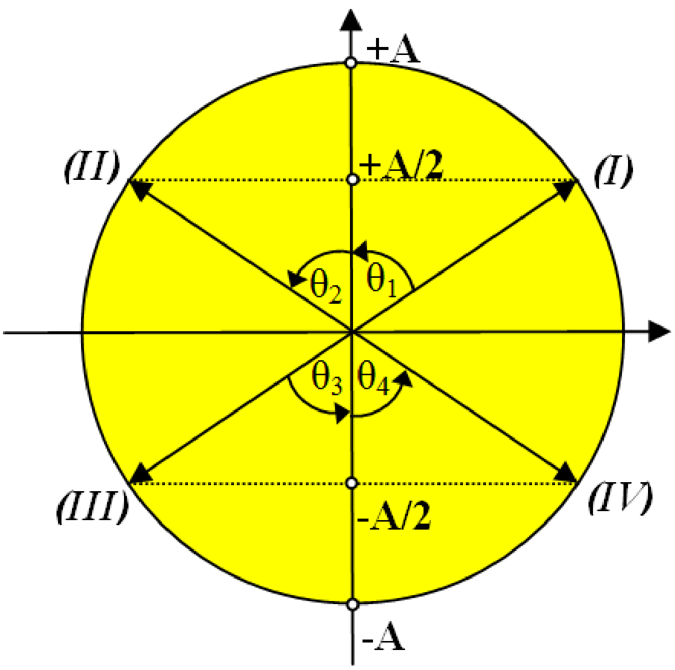
Έτσι, η χρονική εξίσωση της ταχύτητας θα είναι:

$$u = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \boxed{u = 2\sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right)\ (S.I.)}$$

iii)

$$K \leq 3U \Rightarrow E - U \leq 3U \Rightarrow 4U \geq E \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} D x^2 \geq \frac{1}{2} D A^2$$

$$\Rightarrow x^2 \geq \frac{A^2}{4} \Rightarrow |x| \geq \frac{A}{2} = 0{,}05\sqrt{2} m$$



Άρα, για όσο χρόνο το σώμα κινείται από την θέση $+\frac{A}{2}$ μέχρι την ακραία θετική +A και στη συνέχεια μέχρι να επιστρέψει στην $+\frac{A}{2}$(σε αυτό το χρονικό διάστημα το περιστρεφόμενου διανύσματος έχει μετακινηθεί από την θέση I στη θέση II, διαγράφοντας επίκεντρη γωνία (θ_1+θ_2)), καθώς και για τον χρόνο όπου το σώμα κινείται από την θέση $-\frac{A}{2}$ μέχρι την ακραία αρνητική –A και στη συνέχεια μέχρι να επιστρέψει στην $-\frac{A}{2}$(σε αυτό το χρονικό διάστημα το περιστρεφόμενου διανύσματος έχει μετακινηθεί από την θέση III στη θέση IV, διαγράφοντας επίκεντρη γωνία (θ_3+θ_4)), ισχύει K≤3U.

Ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{A/2}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{3} rad$$

Επίσης:

$$\sigma\upsilon\nu\theta_3 = \sigma\upsilon\nu\theta_4 = \frac{|-A/2|}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_3 = \theta_4 = \frac{\pi}{3} rad$$

Άρα: $\theta_{o\lambda} = \frac{4\pi}{3} rad$ οπότε το ζητούμενο χρονικό διάστημα είναι:

$$\omega = \frac{\theta_{o\lambda}}{t_{o\lambda}} \Longrightarrow t_{o\lambda} = \frac{\theta_{o\lambda}}{\omega} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{5} \Longrightarrow \boxed{t_{o\lambda} = \frac{4\pi}{15} rad}$$

iii) Όταν το ελατήριο βρεθεί σε κατάσταση μέγιστης επιμήκυνσης, το σώμα θα βρίσκεται στην δεξιά ακραία θέση της ταλάντωσης του, όπου η ταχύτητα στιγμιαία θα μηδενίζεται. Έτσι, το έργο της δύναμης επαναφοράς από την χρονική στιγμή t=0 έως την ακραία δεξιά θέση μπορεί να υπολογιστεί με Θ.Μ.Κ.Ε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F\varepsilon\pi} \Rightarrow W_{F\varepsilon\pi} = 0 - \frac{1}{2}mu^2 = -\frac{1}{2}2\left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow \boxed{W_{F\varepsilon\pi} = -3J}$$

γ) i) Την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\mathbf{7T}}{\mathbf{6}}$ το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{7T}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = A \Longrightarrow x = 0{,}4m$$

Επομένως, την χρονική στιγμή t_1, η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_1 = U_{\varepsilon\lambda,1} = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}50 \cdot 0{,}4^2 = 4J$$

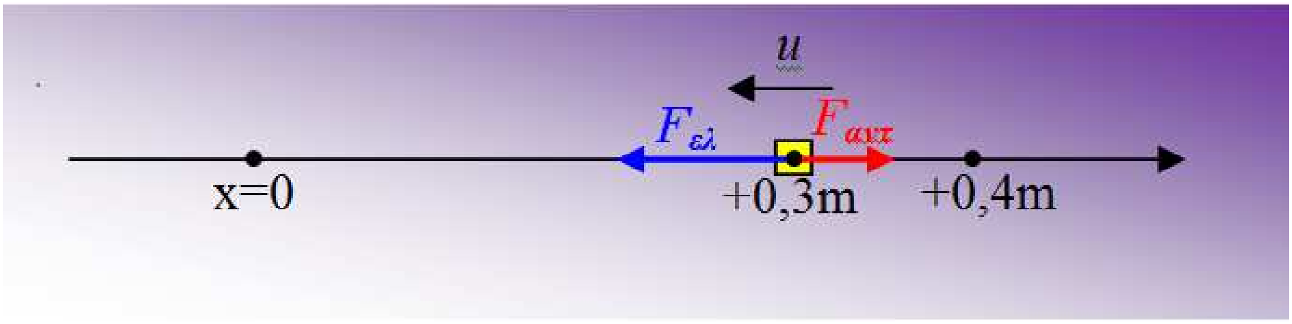
ενώ την χρονική στιγμή t_2, η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_2 = K_2 + U_{\varepsilon\lambda,2} = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 1^2 + \frac{1}{2}50 \cdot 0{,}3^2 = 3{,}25J$$

Άρα η απώλεια μηχανικής ενέργειας είναι:

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = E_1 - E_2 = 4 - 3{,}25 \Rightarrow \boxed{E_{\alpha\pi\omega\lambda} = 0{,}75J}$$

ii) Την χρονική στιγμή t_2 που το ελατήριο έχει μήκος 0,8m η απομάκρυνση από την θέση x=0 είναι x=0,8-0,5=+0,3m, ενώ πλησιάζει προς την x=0 δηλαδή κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, δεδομένου ότι την μεταγενέστερη στιγμή t_3 που μεγιστοποιείται για $1^η$ φορά προς την θέση ισορροπίας για $1^η$ φορά θα πρέπει αυτό να πλησιάζει προς τη Θ.Ι. του. Άρα για την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας u=-1m/s, ενώ την ίδια στιγμή επειδή επιταχύνεται(που σημαίνει ότι η επιτάχυνση πρέπει να είναι ομόρροπη της ταχύτητάς του) για την αλγεβρική στιγμή της επιτάχυνσης θα ισχύει α=-7,1m/s^2.



Εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο Νεύτωνα για την φθίνουσα ταλάντωση θα ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = m\vec{a} \Longrightarrow -kx - bu = ma$$

$$\Longrightarrow b = \frac{-k\Delta l - ma}{u} = \frac{-50 \cdot (+0{,}3) - 2(-7{,}1)}{-1} \Rightarrow \boxed{\mathbf{b = 0{,}8kg/s}}$$

iii) Θέση ισορροπίας είναι αυτή στην οποία μηδενίζεται η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο ταλαντούμενο σώμα. Έτσι έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = \vec{0} \Longrightarrow -kx - bu_{max} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{k}u_{max}$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει τις θέσεις μεγιστοποίησης του μέτρου της ταχύτητας. Θα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι στην διάρκεια της φθίνουσας, οι παραπάνω θέσεις δεν είναι σταθερές διότι δεν είναι σταθερό το u_{max}, δεδομένου ότι στην φθίνουσα ελαττώνεται η μηχανική ενέργεια του συστήματος, άρα μειώνεται το πλάτος(της απομάκρυνσης) και το πλάτος της ταχύτητας. Δηλαδή όταν λέμε μεγιστοποίηση του πλάτους της ταχύτητας εννοούμε ότι η γραφική παράσταση στο συγκεκριμένο σημείο θα παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Επίσης, στις θέσεις μεγιστοποίησης του πλάτους της ταχύτητας η απομάκρυνση $\vec{x}$ πρέπει να είναι αντίρροπή της ταχύτητας. Επειδή η απομάκρυνση $\vec{x}$ έχει διαρκώς κατεύθυνση από την θέση x=0 προς το σώμα, το μέτρο της ταχύτητας μεγιστοποιείται με το σώμα να πλησιάζει προς την x=0.

Την 1η φορά που μεγιστοποιείται το μέτρο της ταχύτητας θα ισχύει για το μέτρο της:

$$|u_{max}| = |u_1| + \frac{25}{100}|u_1| = 1{,}25m/s$$

Επειδή την 1η φορά που θα μεγιστοποιηθεί το μέτρο της ταχύτητας, το σώμα θα κινείται από την θέση μέγιστης απομάκρυνσης από την x=0, που άρχισε να ενεργεί η δύναμη αντίστασης προς την x=0,το σώμα πλησιάζει προς την x=0 οπότε u_{max}=-1,25m/s και θα έχουμε:

$$x = -\frac{b}{k}u_{max} = -\frac{0{,}8}{50}(-1{,}25) \Rightarrow \boxed{x = +0{,}02m}$$

Επιμέλεια:

Πέτρος Καραπέτρος