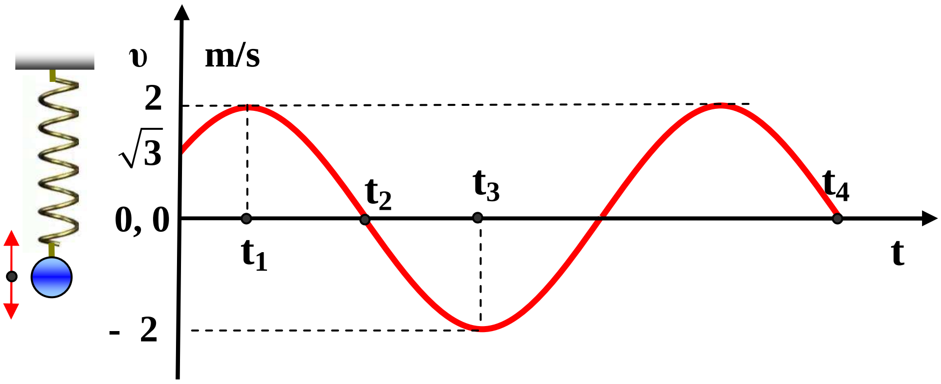
Αξιοποίηση του διαγράμματος ταχύτητας - χρόνου

Ένα σώμα μάζας m = 4 kg είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο.



Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της ταχύτητας του σώματος , σε συνάρτηση με το χρόνο όπου $t_4 - t_2 = \pi/5$ s . Με δεδομένο ακόμη ότι, τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα κινείται κατακόρυφα προς τα επάνω να υπολογίσετε :

i) Την απομάκρυνση x_o του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t = 0.

ii) Την συνάρτηση απομάκρυνσης - χρόνου x = f(t) και να την παραστήσετε γραφικά.

iii) Τις χρονικές στιγμές t_1 , t_2 και t_3.

iv) Την δυναμική ενέργεια του ελατηρίου την χρονική στιγμή $t = t_2$.

v) Την δυναμική ενέργεια λόγω της ταλάντωσης την χρονική στιγμή $t = t_2$

vi) Τις τιμές των παρακάτω μεγεθών από t = 0 μέχρι $t = t_2$

α. έργο της δύναμης επαναφοράς

β. έργο της δύναμης του ελατηρίου

γ. έργο του βάρους

Δίνεται g = 10 m /s²

Απάντηση

i) Από το διάγραμμα που μας δίνεται προκύπτει ότι $t_4 - t_2 = T$ (περίοδος) , άρα $T = \pi/5$ s .

Όμως είναι $\omega = 2\pi/T$ οπότε $\omega = 10$ rad/s (1)

Στο ίδιο διάγραμμα παρατηρούμε ότι , η μέγιστη ταχύτητα κατά την ταλάντωση είναι $\upsilon_{max} = 2$ m/s (2)

Όμως ισχύει ότι $\upsilon_{max} = \omega \cdot A$ και με βάση τις (1) και (2) προκύπτει ότι A = 0,2 m (3).

Με βάση τώρα την αρχή της διατήρησης της ενέργειας (ΑΔΕ) για την ταλάντωση έχομε

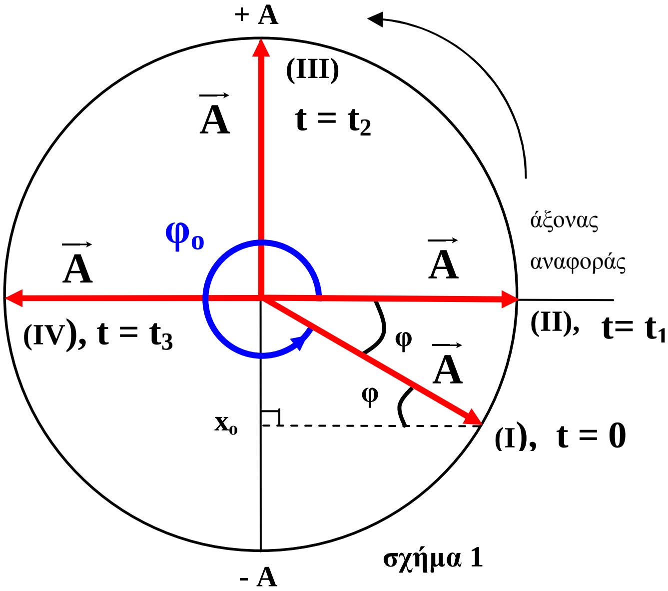
$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + \frac{1}{2}kx_o^2 = \frac{1}{2}kA^2 \\ k = m\omega^2\end{array}\right\} \text{άρα } x_o = \pm\sqrt{A^2 - \left(\frac{\upsilon_o}{\omega}\right)^2} = \pm 0{,}1 \text{ m}$$

Στο διάγραμμα βλέπουμε ακόμη ότι , τη χρονική στιγμή t = 0 η ταχύτητα είναι $\upsilon_o > 0$ και αμέσως μετά αυξάνεται προς την μέγιστη θετική της τιμή . Αυτό σημαίνει ότι , το σώμα κινείται στον αρνητικό ημιάξονα κατευθυνόμενο προς τη θέση ισορροπίας του άρα, η απομάκρυνσή του τη χρονική στιγμή t = 0 είναι

$$x_o = -0{,}1\ m \quad (4)$$

ii) Η εξίσωση απομάκρυνσης – χρόνου έχει τη μορφή $x = A\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$ (5)

Με βάση τα παραπάνω, το στρεφόμενο διάνυσμα $\vec{A}$ τη χρονική στιγμή t = 0 θα βρίσκεται στη θέση (Ι) του κύκλου αναφοράς, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



σχήμα 1

Έτσι, η αρχική φάση φ_o θα είναι $\varphi_o = 2\pi - \varphi$. Αλλά με βάση τη γεωμετρία του σχήματος 1 έχομε ότι

$$\eta\mu\varphi = \frac{|x_o|}{A} = \frac{1}{2} \text{ άρα } \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad οπότε}$$

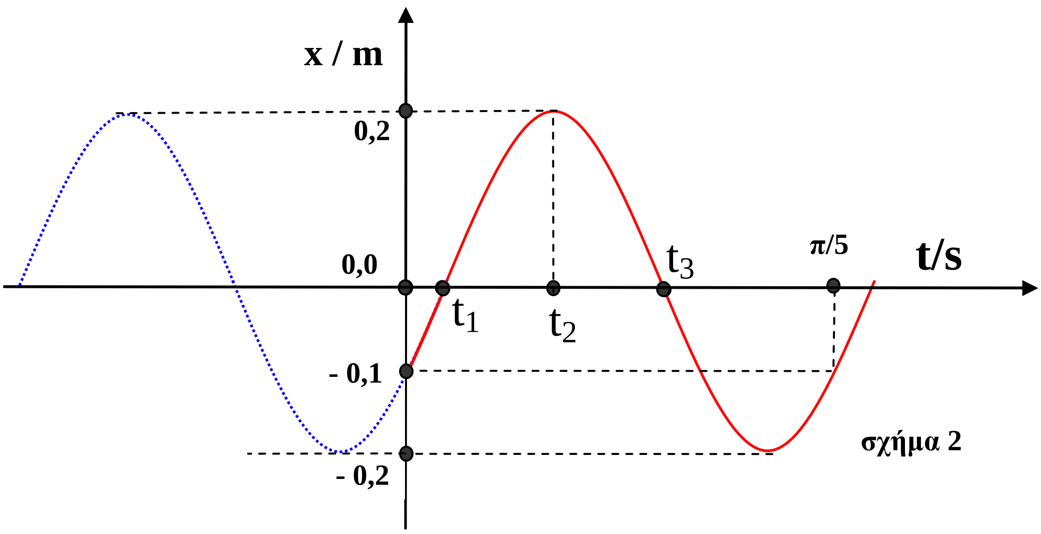
$$\varphi_o = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad} \quad (6)$$

Η (5) με βάση τις (1) , (3) και (6) γράφεται έτσι

$$\mathbf{x = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{11\pi}{6}\right)} \quad (7)$$

οι μονάδες στο SI

Η γραφική παράσταση της (7) φαίνεται στο σχήμα 2 .



σχήμα 2

iii) Κατά τις χρονικές στιγμές $t = t_1$ και $t = t_3$ το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη και δεύτερη φορά αντίστοιχα , άρα το στρεφόμενο διάνυσμα $\vec{A}$ βρίσκεται στις θέσεις (ΙΙ) και (IV) όπως στο σχήμα 1. Άρα

$$\omega t_1 = \varphi \text{ ή } 10t_1 = \frac{\pi}{6} \text{ ή } t_1 = \frac{\pi}{60}\ s \text{ και}$$

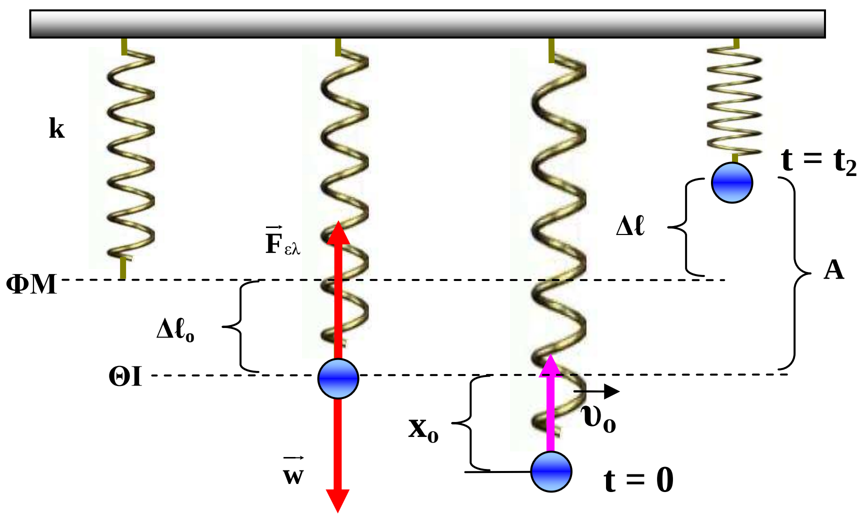
$$\omega t_3 = \pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } 10t_3 = \frac{7\pi}{6} \text{ ή } t_3 = \frac{7\pi}{60}\ s$$

Εξ άλλου από το διάγραμμα της εκφώνησης, συμπεραίνομε ότι, τη χρονική στιγμή $t = t_2$ στο σώμα ηρεμεί στιγμιαία για πρώτη φορά , άρα το στρεφόμενο διάνυσμα $\vec{A}$ βρίσκεται τότε στη θέση (ΙΙΙ) , όπως φαίνεται στον κύκλο αναφοράς – σχήμα 1.

$$\text{Άρα } \omega t_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \text{ ή } 10t_2 = \frac{2\pi}{3} \text{ ή } t_2 = \frac{\pi}{15} \text{ s} .$$

iv) Τη χρονική στιγμή t_2 το σώμα ηρεμεί , σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα , στην πάνω ακραία θέση της τροχιάς του και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta\ell^2$ (8)

όπου $k = m\omega^2 = 400$ N/m (9)



σχήμα 3

Στη θέση ισορροπίας ισχύει $\vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{w} = \vec{0}$ ή $k \cdot \Delta\ell_o = mg$ ή $\Delta\ell_o = mg/k$ ή $\Delta\ell_o = 0{,}1$ m $< A$, άρα το σώμα ανέρχεται πάνω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου όπως φαίνεται στο σχήμα 3.

Παρατηρώντας το σχήμα 3 λοιπόν έχομε ότι $A = \Delta\ell + \Delta\ell_o$ ή $\Delta\ell = A - \Delta\ell_o$ ή $\Delta\ell = 0{,}1$ m (10)

Οπότε από τις (3), (8) , (9) και (10) έχομε $\mathbf{U_{\varepsilon\lambda} = 2\ j}$

v) Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι $U_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2} D \cdot x^2 = \frac{1}{2} k \cdot x^2$ όπου x η απόσταση του σώματος που ταλαντώνεται από τη θέση της ισορροπίας του. Αλλά τη χρονική στιγμή $t = t_2$ είναι $x = A$ άρα

$$U_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \quad \text{και με βάση τις (3) , (9)} \quad \mathbf{U_{\tau\alpha\lambda} = 8\ j}$$

vi) α. Επειδή η δύναμη επαναφοράς είναι συντηρητική το έργο της είναι

$$W_{\Sigma F} = U_{\tau\alpha\lambda(\alpha\rho\chi)} - U_{\tau\alpha\lambda(\tau\varepsilon\lambda)} = \frac{1}{2} D \cdot x_o^2 - \frac{1}{2} D \cdot x_2^2 \quad \text{ή}$$

$$W_{\Sigma F} = \frac{1}{2} k \cdot x_o^2 - \frac{1}{2} k \cdot A^2 = \frac{1}{2} k \left(x_o^2 - A^2 \right) \quad \text{και με βάση τις (3) , (4) , (9)}$$

$$\mathbf{W_{\Sigma F} = -6\ j}$$

β. Επειδή η δύναμη του ελατηρίου είναι κι αυτή συντηρητική το έργο της είναι

$W_{F\varepsilon\lambda} = U_{\varepsilon\lambda(\alpha\rho\chi)} - U_{\varepsilon\lambda(\tau\varepsilon\lambda)} = \frac{1}{2}k\,(\Delta\ell_o + x_o)^2 - \frac{1}{2}k\cdot\Delta\ell^2$ και με βάση τις (9), (10) με $\Delta\ell_o = 0{,}1$ m προκύπτει

$$\mathbf{W_{F\varepsilon\lambda} = +\,6\ j}$$

γ. Το έργο του βάρους είναι

$$\mathbf{W_w = -mg\,(A+x_o) = -\,12\ j}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου δεν συμπίπτει πάντα με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης.

2. Κατά την κίνηση του σώματος, ασκείται πάνω του η δύναμη του βάρους του $\vec{w}$ και η δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$. Επαληθεύεται λοιπόν και αριθμητικά ότι $W_{\Sigma F} = W_w + W_{F\varepsilon\lambda}$ (-6 j = -12 j +6 j)

2. Το έργο της δύναμης επαναφοράς $W_{\Sigma F}$ είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας ΔΚ δηλαδή $W_{\Sigma F} = 0 - \frac{1}{2}m\,\upsilon_o^2$, σε συμφωνία με το θεώρημα έργου ενέργειας.

Εννοείται ότι μπορεί να υπολογιστεί το έργο $W_{\Sigma F}$, και με βάση το θεώρημα αυτό.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης

.