Άσκηση 3η στις θεμελιώδεις έννοιες της ΑΑΤ.

Σώμα μάζας m=1kg εκτελεί α.α.τ με εξίσωση ταλάντωσης της μορφής $x=A\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{6})$ (S.I). Σε χρόνο Δt=π s το σώμα εκτελεί ακέραιο πλήθος πλήρων ταλαντώσεων και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται μέγιστη 10 φορές. Η κινητική ενέργεια γίνεται ίση με τη δυναμική σε δύο θέσεις της τροχιάς που απέχουν απόσταση $d=0{,}4\sqrt{2}$ m.

i) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο x=x(t).

ii) Να υπολογίσετε τη Δυναμική και την Κινητική ενέργεια της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{T}{4}$.

iii) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της Δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης ΔU από τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{T}{4}$ έως τη χρονική στιγμή $t_2=\frac{T}{2}$. Στο χρονικό διάστημα $\Delta t= t_2 - t_1$ το σώμα πλησιάζει ή απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του;

iv) Να υπολογιστεί ο ρυθμός παραγωγής ή κατανάλωσης έργου της δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης $\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt}$, όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x=+\frac{A}{2}$.

v) Να υπολογιστούν οι ρυθμοί μεταβολής της Δυναμικής και της Κινητικής ενέργειας $\frac{dU}{dt}$ και $\frac{dK}{dt}$ αντίστοιχα τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{T}{4}$.

Λύση:

i) Η Δυναμική ενέργεια σε κάθε περίοδο γίνεται μέγιστη 2 φορές. Άρα σε χρόνο Δt το πλήθος Ν των μεγιστοποιήσεων της Δυναμικής ενέργειας είναι: $N=2\frac{\Delta t}{T} \Rightarrow T=2\frac{\Delta t}{N} \Rightarrow T=\frac{\pi}{5}$ s και $\omega=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega=10$rad/s(1).

Η ενέργεια Ε στην αμείωτη α.α.τ είναι σταθερή: $E=U+K \Rightarrow E=2U \Rightarrow \upsilon_{max}=2\upsilon \Rightarrow \upsilon=\frac{\upsilon_{max}}{2} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x=\pm\frac{A\sqrt{2}}{2}$. Δηλαδή υπάρχουν 2 θέσεις της τροχιάς ($x=+\frac{A\sqrt{2}}{2}$) και ($x=-\frac{A\sqrt{2}}{2}$) στις οποίες U=K. Άρα η απόσταση d των δύο θέσεων είναι: $d=\left|\frac{A\sqrt{2}}{2}-(-\frac{A\sqrt{2}}{2})\right| \Rightarrow$

$d=A\sqrt{2} \Rightarrow A=0{,}4$m (2).

Η εξίσωση της απομάκρυνσης $x=A\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{6})$ με αριθμητική αντικατάσταση από τις (1) και (2) γράφεται: $x=0{,}4\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6})$ (S.I) (3).

ii) Η έκφραση της Δυναμικής ενέργειας της α.α.τ σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$U=\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow U=\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \underset{(3)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} U=8\eta\mu^2(10t+\frac{\pi}{6}) \text{ (S.I).}$$

Για τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{20}$ s η Δυναμική ενέργεια είναι $U_1=8\eta\mu^2(10\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow U_1=6J$ (4).

Η εξίσωση της ταχύτητας της α.α.τ είναι:

$$\upsilon=\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\frac{\pi}{6}) \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon=4\sigma\upsilon\nu(10t+\frac{\pi}{6}) \text{ (S.I) (5).}$$

Η έκφραση της Κινητικής ενέργειας είναι:

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon^2 \overset{(5)}{\Rightarrow} K = 8\sigma\upsilon\nu^2(10t+\frac{\pi}{6}).$$

Για τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{20}$ s: $K_1=2J$.

iii) Η μεταβολή της Δυναμικής ενέργειας είναι: $\Delta U=U_2 - U_1$ (6). Η Δυναμική ενέργεια τη χρονική στιγμή $t_2=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{10}$ s είναι:

$$U_2=8\eta\mu^2\left(10\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow U_2 = 2J \text{ (7).}$$

Από (6) $\underset{(7)}{\overset{(4)}{\Rightarrow}} \Delta U=2-6 \Rightarrow \Delta U=-4J$. Στο χρονικό διάστημα $\left[t_1, t_2\right]$ η δυναμική ενέργεια ελαττώνεται, άρα το σώμα πλησιάζει στη θέση ισορροπίας του.

iv) Ο ρυθμός παραγωγής και κατανάλωσης έργου (στιγμιαία Ισχύς) της δύναμης επαναφοράς υπολογίζεται ως εξής:

Σε μια απειροστή μετατόπιση dx στην οποία το μέτρο της δύναμης επαναφοράς $\left|\vec{F}_{\varepsilon\pi}\right|$ και το μέτρο της ταχύτητας $\left|\vec{\upsilon}\right|$ θεωρούμε ότι παραμένουν σταθερά,

1ος τρόπος

Από τον ορισμό του έργου δύναμης σταθερής διεύθυνσης και μέτρου έχουμε

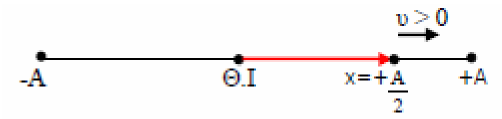
$$\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt}=\frac{\left|\vec{F}_{\varepsilon\pi}\right|\left|d\vec{x}\right|\sigma\upsilon\nu\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\,W_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt}=\left|\vec{F}_{\varepsilon\pi}\right|\left|\vec{\upsilon}\right|\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \frac{d\,W_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt}=D\left|\vec{x}\right|\left|\vec{\upsilon}\right|\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{d\,W_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt}=m\omega^2\left|\vec{x}\right|\left|\vec{\upsilon}\right|\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Στη σχέση αυτή αντικαθιστούμε τα μέτρα της απομάκρυνσης και της ταχύτητας και $\hat{\varphi}$ =η γωνία που σχηματίζουν τα διανυσματικά μεγέθη $\vec{x}$ και $\vec{\upsilon}$. Στην α.α.τ τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{\upsilon}$ σχηματίζουν γωνία $\hat{\varphi}=0$ rad ή $\hat{\varphi}=\pi$ rad. Από τα δεδομένα δεν προκύπτει ποια είναι η τιμή της $\hat{\varphi}$ άρα οι τιμές του ζητού-

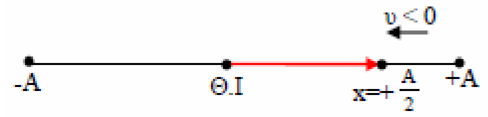
$\upsilon > 0$

μενου ρυθμού στη θέση x=+$\frac{A}{2}$ είναι: $\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}=mω^2\frac{A}{2}|\vec{υ}|συνφ$



Όταν $\hat{φ}$ =0 rad και συν$\hat{φ}$ =1, τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{υ}$ είναι ομόρροπα και:

$$\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}=mω^2\frac{A}{2}|\vec{υ}| \quad (8)$$



Όταν $\hat{φ}$ =π rad και συν$\hat{φ}$ =-1, τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{υ}$ είναι αντίρροπα και:

$$\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}=-mω^2\frac{A}{2}|\vec{υ}| \quad (9)\,.$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι σταθερή:

$$E=U+K\Rightarrow\frac{1}{2}DA^2=\frac{1}{2}Dx^2+\frac{1}{2}mυ^2\overset{x=+\frac{A}{2}}{\Rightarrow}\frac{1}{2}DA^2=\frac{1}{2}D\frac{A^2}{4}+\frac{1}{2}mυ^2\Rightarrow$$

$$υ=ωA\frac{\sqrt{3}}{2}\overset{(2)}{\Rightarrow}|\vec{υ}|=2\sqrt{3}\text{ m/s } (10).$$

Από (8) $\overset{(10)}{\Rightarrow}\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}=40\sqrt{3}\,J/s\,(W)$. Από (9) $\overset{(10)}{\Rightarrow}\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}=-40\sqrt{3}\,J/s\,(W)$.

2ος τρόπος

Στην α.α.τ τα διανυσματικά μεγέθη $\vec{x}$ και $\vec{υ}$ είναι συγγραμμικά, άρα

$$\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}=\frac{F_{επ}dx}{dt}\Rightarrow\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}=F_{επ}υ\Rightarrow\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}=-Dxυ\Rightarrow\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}=-mω^2xυ$$

$$\Rightarrow\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}=-mω^2(+\frac{A}{2})υ\Rightarrow\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}=-100(+0,2)(\pm2\sqrt{3})\Rightarrow\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}=\pm40\sqrt{3}\,J/s\,.$$

v) Ο ρυθμός μεταβολής της Δυναμικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dU}{dt}=-\frac{dW_{F_{επ}}}{dt}\Rightarrow\frac{dU}{dt}=-F_{επ}\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{dU}{dt}=-(-Dx)υ\Rightarrow\frac{dU}{dt}=Dxυ\Rightarrow\frac{dU}{dt}=mω^2xυ \quad (11)$$

$$\text{Από (11)}\underset{(5)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}}\frac{dU}{dt}=1\cdot10^2\cdot0,4ημ(10t+\frac{π}{6})\cdot4συν(10t+\frac{π}{6})\Rightarrow\frac{dU}{dt}=80ημ(20t+\frac{π}{3})$$

$$\overset{t=t_1=\frac{π}{20}s}{\Rightarrow}\frac{dU}{dt}=-40\sqrt{3}\text{ J/s (W)} \quad (12)$$

Η ενέργεια στην αμείωτη α.α.τ είναι σταθερή:

$$E=U+K \Rightarrow dE=dU+dK \Rightarrow dK=-dU \Rightarrow \frac{dK}{dt}=-\frac{dU}{dt} \overset{(12)}{\Rightarrow} \frac{dK}{dt}=+40\sqrt{3}\ \text{J/s (W)}.$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ξ. Στεργιάδης