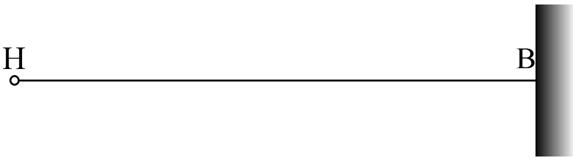
Στάσιμο κύμα από ανάκλαση

Το ένα άκρο Η ομογενούς χορδής μήκους l συνδέεται με διεγέρτη, ο οποίος εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους A και συχνότητας f. Το άλλο άκρο Β είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ο διεγέρτης προκαλεί εγκάρσιες ταλαντώσεις με αποτέλεσμα να διαδίδεται πάνω στη χορδή αρμονικό κύμα προς τα δεξιά, το οποίο ανακλάται στο άκρο Β. **Πάνω στη χορδή σχηματίζεται σταθερό σύστημα στάσιμων κυμάτων**. Αν το μήκος κύματος του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος είναι λ, να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου και να καθοριστούν οι θέσεις των δεσμών και των κοιλιών πάνω στη χορδή.



Απάντηση:

Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων $(x=0)$ το άκρο Η, θετική φορά προς τα δεξιά και ως αρχή μέτρησης του χρόνου $(t=0)$ τη στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται εγκάρσια ο διεγέρτης. Η πηγή του προσπίπτοντος κύματος εκτελεί ΑΑΤ της μορφής: $y = A\eta\mu\omega t$.

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ σε απόσταση x από το άκρο Η της χορδής. Εξαιτίας του προσπίπτοντος κύματος το σημείο Μ εκτελεί ταλάντωση της μορφής: $y_1 = A\eta\mu\omega(t-\frac{x}{\upsilon}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$.

Όταν το κύμα φθάνει στο άκρο Β της χορδής ανακλάται και παρουσιάζει μεταβολή της φάσης του κατά π. Συγκεκριμένα η εξίσωση ταλάντωσης του Β εξαιτίας του προσπίπτοντος κύματος είναι: $y_{1(B)} = A\eta\mu\omega(t-\frac{l}{\upsilon})$. Επειδή το Β είναι ακλόνητο, πρέπει η συνολική απομάκρυνση εξαιτίας προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος να είναι συνεχώς μηδέν. Άρα:

$$y_{(B)} = y_{1(B)} + y_{2(B)} = 0 \Rightarrow y_{2(B)} = -y_{1(B)} = -A\eta\mu\omega(t-\frac{l}{\upsilon})$$

Το σημείο Μ εξαιτίας του ανακλώμενου κύματος αρχίζει να ταλαντώνεται μετά από χρόνο $\Delta t = \frac{l-x}{\upsilon}$ από τη στιγμή που το προσπίπτον κύμα έφθασε στο Β. Η εξίσωση ταλάντωσης του Μ εξαιτίας του ανακλώμενου κύματος είναι:

$$y_2 = -A\eta\mu\omega(t-\frac{l}{\upsilon}-\frac{l-x}{\upsilon}) = -A\eta\mu\omega(t-\frac{2l}{\upsilon}+\frac{x}{\upsilon}) \Rightarrow y_2 = -A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{2l}{\lambda}+\frac{x}{\lambda})$$

Η εξίσωση της συνισταμένης κίνησης του Μ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}) - \eta\mu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{2l}{\lambda}+\frac{x}{\lambda})\right]$$

Με βάση την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}$$

η πιο πάνω σχέση μετασχηματίζεται στη μορφή:

$$y = 2A\eta\mu 2\pi(\frac{l-x}{\lambda})\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{l}{\lambda})$$

Η σχέση αυτή για **ορισμένο** x, περιγράφει μια ΑΑΤ με περίοδο ίδια με την περίοδο των κυμάτων που συμβάλλουν και πλάτος:

$$|A'| = 2A\left|\eta\mu 2\pi(\frac{l-x}{\lambda})\right| \text{ όπου: } \quad 0 \le |A'| \le 2A$$

Η ταλάντωση των σημείων της χορδής με **πλάτος που εξαρτάται από τη θέση** του σημείου πάνω στη χορδή, αντιστοιχεί σε **στάσιμο** κύμα.

Οι θέσεις των σημείων της χορδής τα οποία παραμένουν ακίνητα, **δεσμοί του στάσιμου,** υπολογίζονται ως εξής:

$$A' = 0 \Rightarrow \eta\mu 2\pi(\frac{l-x_\delta}{\lambda}) = 0 = \eta\mu\kappa\pi \Rightarrow 2\pi(\frac{l-x_\delta}{\lambda}) = \kappa\pi \Rightarrow l - x_\delta = \kappa\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_\delta = l - \kappa\frac{\lambda}{2}, \kappa = 0,1,2,...$$

Ο πρώτος δεσμός σχηματίζεται στη θέση: $\kappa = 0 \Rightarrow x_{\delta(1)} = l$, δηλαδή ο **πρώτος δεσμός** σχηματίζεται στο **ακλόνητο σημείο Β**.

Οι θέσεις των σημείων της χορδής τα οποία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, **κοιλίες του στάσιμου,** υπολογίζονται ως εξής:

$$|A'| = 2A \Rightarrow \eta\mu 2\pi\frac{(l-x_K)}{\lambda} = \pm 1 = \eta\mu(2\kappa+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi\frac{(l-x_K)}{\lambda} = (2\kappa+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$l - x_K = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_K = l - (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4}, \kappa = 0,1,2,.....$$

Η πρώτη κοιλία σχηματίζεται στη θέση: $\kappa = 0 \Rightarrow x_{K(1)} = l - \frac{\lambda}{4}$, δηλαδή **απέχει απόσταση** $\frac{\lambda}{4}$ **από το ακλόνητο άκρο Β**.

Σχόλιο

Το ακλόνητο άκρο Β είναι δεσμός, ενώ το **ελεύθερο** άκρο Η είναι **σχεδόν δεσμός**. Ανάμεσα στα Η, Β υπάρχουν σημεία που είναι σχεδόν δεσμοί αφού το πλάτος ταλάντωσης είναι πολύ μικρό. Τα σημεία αυτά δεν είναι δυνατό να είναι πραγματικοί δεσμοί, γιατί κατά μήκος της χορδής πρέπει να μεταφέρεται ενέργεια από την πηγή παραγωγής των κυμάτων, αφού πάντα έχουμε αποσβέσεις οπότε πρέπει να αναπληρώνονται οι απώλειες ενέργειας και να έχουμε ταλάντωση σταθερού πλάτους.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασγουρίδης