Εξίσωση κύματος.

Θέλουμε να διδάξουμε την εξίσωση κύματος. Ποιο κατά την γνώμη μου είναι το σημαντικότερο όλων και το οποίο πρέπει να στοχεύει η διδασκαλία μας; «Το ότι αν υπάρχει μια πηγή αρμονικής διαταραχής που αρχίζει να ταλαντώνεται για $t_0=0$ με εξίσωση y=Αημωt, κάθε σημείο του μέσου Μ θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη στιγμή $t_1=x/υ$» ΕΚΤΕΛΩΝΤΑΣ ΑΠΟΛΥΤΑ ΟΜΟΙΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ. Τα εισαγωγικά είναι λόγια του σχολικού βιβλίου και τα κεφαλαία γράμματα είναι αυτό που εννοεί (αλλά δεν το λέει) και στο οποίο θέλω να εστιάσουμε την προσοχή μας. Έτσι για το σημείο Μ όταν μετά από λίγο θα αρχίσει να ταλαντώνεται η εξίσωση της απομάκρυνσής του σε συνάρτηση με το χρόνο θα είναι:

$y=Αημω(t-t_1)$ ….. και φτάνουμε στην εξίσωση του σχολικού βιβλίου:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \quad (1)$$

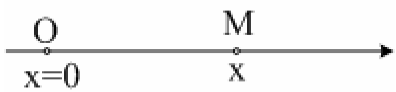
Συχνά περνάμε γρήγορα τα παραπάνω, κρατάμε την εξίσωση (1) και αρχίζουμε να αντικαθοστούμε τιμές στο t (βρίσκοντας στιγμιότυπα) ή στο x και (παίρνοντας την εξίσωση ταλάντωσης κάποιου σημείου). Το ενδιαφέρον εστιάζεται στο πώς ο μαθητής θα χαράξει τις γραφικές παραστάσει και μέχρι ποια θέση θα πρέπει να φτάσει, ή ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η γραφικη παράσταση.

Προτείνω λοιπόν να εστιάσουμε την προσοχή μας στην εύρεση της εξίσωσης του κύματος. Αν κάποιος συνηδητοποιήσει ότι βρίσκει την εξίσωση ταλάντωσης ενός σημείου, γνωρίζοντας την εξίσωση ταλάντωσης ενός άλλου (προς το παρόν της πηγής), θα έχει κατανοήσει ότι κύμα είναι η διάδοση της ταλάντωσης και θεωρώ ότι αυτό είναι η ουσία του κύματος.

Αμέσως μετά το βιβλίο αναφέρει ότι αντίστοιχα για ένα κύμα προς τα αριστερά η εξίσωση θα είναι:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right) \quad (2).$$

Αλήθεια πώς προκύπτει αυτή η εξίσωση;



Προφανώς η εξίσωση υπονοεί ότι αν το σημείο Ο που βρίσκεται στη θέση x=0 αρχίζει να ταλαντώνεται για $t_0=0$ σύμφωνα με την εξίσωση y=Αημωt, εξαιτίας ενός κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά, τότε κάθε σημείο Μ δεξιά του Ο θα έχει ξεκινήσει την ταλάντωσή του πριν από το Ο κατά χρονικό διάστημα $t_1=x/υ$, οπότε η εξίσωση ταλάντωσης του Μ θα είναι:

$y=Αημω(t+t_1)$ = ….. η εξίσωση (2)

Αλλά για να δούμε τι ακριβώς λέει το βιβλίο. Για ένα κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά. Δεν μας λέει που είναι η πηγή. Πράγμα που σημαίνει ότι δεν είναι ανάγκη να ξέρουμε πού είναι η πηγή του κύματος.

ΚΑΘΕ ΥΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΛΕΙΤΟΥΡΓΕΙ ΩΣ ΠΗΓΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΔΕΞΙΑ ΤΟΥ (αν το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά) ή ΓΙΑ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΤΟΥ) για το κύμα προς τα αριστερά).

Ας δούμε λοιπόν κάποια παραδείγματα

Παράδειγμα 1^{o}

Ένα κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου με ταχύτητα 2m/s και συχνότητα 1Hz. Το πλάτος ταλάντωσης κάθε σημείου είναι Α=0,1m Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος αν:

i) Το σημείο στη θέση x=0 για t=0 περνά από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.
ii) Για t=0, το σημείο στη θέση x=0, βρίσκεται στην ακραία θέση του με θετική απομάκρυνση, για πρώτη φορά.
iii) Για t=0 ένα σημείο που βρίσκεται στη θέση x=0 έχει ταχύτητα ταλάντωσης υ= -ωΑ.

Απάντηση:

i) Αφού f=1Hz, T = 1s και υ=λf → λ= 2m

Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου στη θέση x=0 είναι y= 0,1ημ(2πt), οπότε η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y_1 = 0,1 \cdot ημ2π(t - \frac{x}{2}) \quad \text{(S.I.)}$$

ii) Αφού το σημείο στη θέση x=0 για t=0 βρίσκεται στην ακραία θετική απομάκρυνση έχει αρχική φάση $φ_0 = \frac{π}{2}$ οπότε $y_2 = 0,1 \cdot ημ(2πt + \frac{π}{2})$ και η εξίσωση του κύματος θα είναι:

$$y_2 = 0,1 \cdot ημ(2πt - 2π\frac{x}{2} + \frac{π}{2}) = 0,1 \cdot ημ2π(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}) \quad \text{(S.I.)}$$

iii) Αφού το σημείο στη θέση x=0 κινείται με μέγιστη αρνητική ταχύτητα έχει αρχική φάση $φ_0 = π$.

Έτσι το κύμα έχει εξίσωση:

$$y_3 = 0,1 \cdot ημ(2πt - 2π\frac{x}{2} + π) = 0,1 \cdot ημ2π(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}) \quad \text{(S.I.)}$$

Παράδειγμα 2^{o}

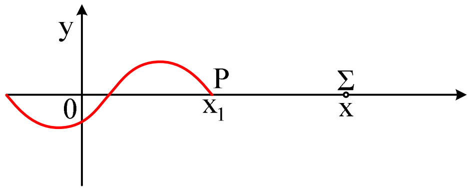
Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται με ταχύτητα 2m/s, κατά μήκος του άξονα x από αριστερά προς τα δεξιά και για t=0 φτάνει σε ένα σημείο Ρ στη θέση x_1= 4/3 m. Το σημείο Ρ αρχίζει την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας και κινείται προς την θετική κατεύθυνση με συχνότητα 1Hz και πλάτος Α=0,2m.

Να βρεθεί την εξίσωση του κύματος.

Απάντηση:

Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

$$\upsilon=\lambda f \rightarrow \lambda=\upsilon \cdot T= 2m$$



Το σημείο αρχίζει την ταλάντωσή του χωρίς αρχική φάση οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσής του θα είναι:

$$y_P= 0,2\eta\mu \;\; y_P = 0,2\eta\mu\frac{2\pi}{T}t = 0,2\eta\mu 2\pi t \quad (S.I.)$$

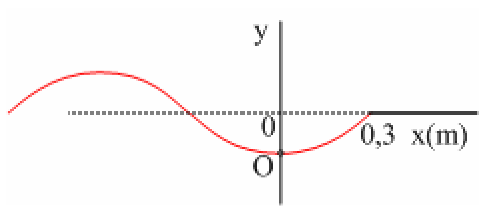
Στο τυχαίο σημείο Σ που βρίσκεται στη θέση x, το κύμα θα καθυστερήσει να φτάσει κατά $t_1 = \dfrac{x - x_1}{\upsilon} = \dfrac{x - 4/3}{2}$, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι:

$$y = 0,2\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x - 4/3}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right) \quad (S.I.) \quad (1)$$

Παράδειγμα 3^{o}

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα.



Στο διάγραμμα δίνεται ένα στιγμιότυπο του κύματος που ελήφθη για t=0. Τη στιγμή αυτή το σημείο Ο, στη θέση x=0 έχει μηδενική ταχύτητα και παρατηρούμε ότι θα ξαναέχει ταχύτητα μηδέν αφού μετακινηθεί κατά d=4cm σε χρόνο 0,4s.

Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

Απάντηση:

Το σημείο Ο βρίσκεται στην μέγιστη αρνητική απομάκρυνσή του και θα έχει ξανά μηδενική ταχύτητα στην μέγιστη θετική απομάκρυνση. Συνεπώς η απόσταση 4cm είναι το διπλάσιο του πλάτους ταλάντωσής του.

Δηλαδή A=$\frac{d}{2}=2cm$. Αντίστοιχα ο χρόνος που απαιτείται για την μετακίνηση αυτή είναι το μισό της περιόδου, άρα T=0,8s.

Με βάση το σχήμα που μας δίνεται λ/4=0,3m → λ=1,2m.

Η εξίσωση ταλάντωσης του O είναι:

$$y= A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$$

και με αντικατάσταση t=0, y=-0,02 παίρνουμε:

$$-0{,}02=0{,}02\eta\mu\varphi_0 \rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0= -1 \text{ άρα } \varphi_0=3\pi/2$$

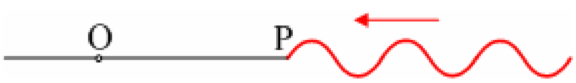
Έτσι η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y= 0{,}02\cdot\eta\mu\left(\omega(t-t_1)+\frac{3\pi}{2}\right), \text{ όπου } t_1=\frac{x}{\upsilon}\rightarrow$$

$$y=0{,}02\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0{,}8}-\frac{x}{1{,}2}+\frac{3}{4}\right) \quad (1)$$

Παράδειγμα 4ο

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από δεξιά προς τα αριστερά διαδίδεται ένα κύμα με ταχύτητα υ=2m/s. Το κύμα για t=0 φτάνει στο σημείο P, στη θέση x_P=2m, το οποίο ξεκινά την ταλάντωσή του κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση (προς τα πάνω).



Τη στιγμή t΄=0,375s το σημείο P έχει μηδενική ταχύτητα, για δεύτερη φορά, ενώ έχει διανύσει απόσταση d=0,3m.

Ποια η εξίσωση του κύματος;

Απάντηση:

Τη χρονική στιγμή t΄ το σημείο P βρίσκεται στην μέγιστη αρνητική απομάκρυνσή του, έχει δηλαδή ταλαντωθεί κατά 3T/4, άρα T= 4/3· t΄=0,5s, ενώ έχει διατρέξει απόσταση d=3A → A=0,1m.

Έχουμε ακόμη ότι υ=$\frac{\lambda}{T}\rightarrow \lambda=\upsilon T=1m$

Με βάση τα παραπάνω η εξίσωση ταλάντωσης του P είναι:

$$y= A\eta\mu\omega t \text{ ή}$$

$$y= 0{,}1\eta\mu 4\pi t \quad (S.I.)$$

Έστω ένα τυχαίο σημείο Σ στη θέση x, όπως στο σχήμα.

Για να φτάσει το κύμα στο σημείο Σ θα απαιτηθεί χρόνος $t_1=\frac{\Delta x}{\upsilon}=\frac{2-x}{2}s$, οπότε η εξίσωση ταλάντωσης του Σ είναι:

$$y= 0{,}1\cdot\eta\mu 4\pi(t-t_1) \text{ ή}$$

$$y= 0,1\cdot ημ4π(t-\frac{2-x}{2})$$

Άρα η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y= 0,1\cdot ημ2π(2t+x-2) \quad (S.I.)$$

Τι νομίζετε αν ακολουθήσουμε την προτεινόμενη πορεία είναι τόσο δύσκολα τα πράγματα;

Και κάτι ακόμη. Δεν θεοποιούμε ούτε την εξίσωση (1) ούτε την (2) για να τις παπαγαλίσουμε και χωρίς να καταλαβαίνουμε σε τι ακριβώς αναφέρονται και τι μας λένε, απλά να τις χρησιμοποιούμε τυπικά σε ασκήσεις. Πώς σας φαίνεται έχουμε πρόβλημα με την αρχική φάση της πηγής και ποια είναι αυτή και πώς δουλεύουμε όταν έχουμε αρχική φάση κλπ; Περνάνε όλα φυσιολογικά και θεωρώ με λίγο κόπο και χωρίς να χάνουμε την ουσία.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης