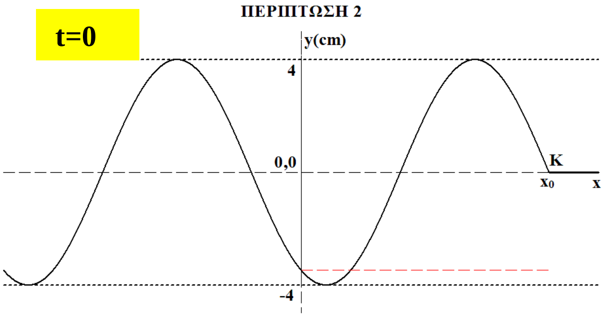
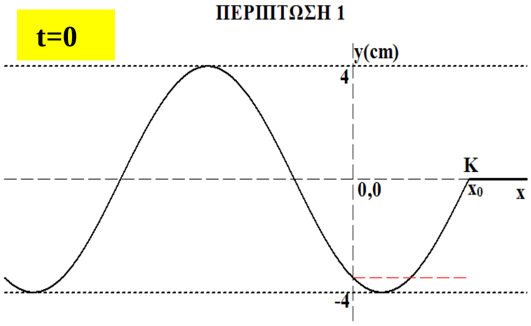
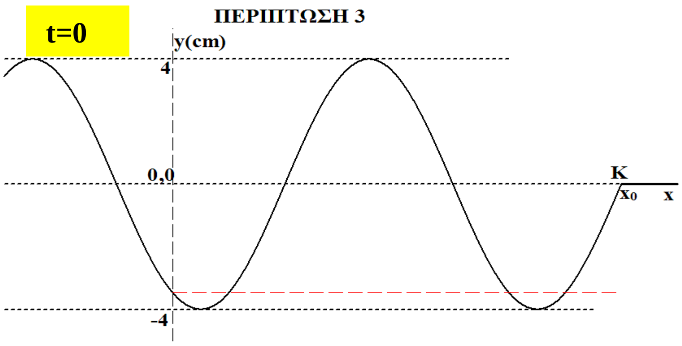
ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους 4cm και συχνότητας 5Hz, διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο θεωρούμε ότι ταυτίζεται με τον προσανατολισμένο άξονα x΄x, προς τη θετική κατεύθυνση. Στο σχήμα δίνεται ένα στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t = 0 (τρεις περιπτώσεις), κατά την οποία το κύμα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση x_0.







Δίνεται ότι τη χρονική στιγμή t = 0 το υλικό σημείο Ο στη θέση x=0, βρίσκεται σε απομάκρυνση $y = -2\sqrt{3}cm$ από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα y.

i) Να βρείτε την εξίσωση ταλάντωσης του υλικού σημείου στη θέση x=0.

ii) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

iii) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

iv) Να παραστήσετε γραφικά τη φάση της απομάκρυνσης (ταλάντωσης)

α) των υλικών σημείων του θετικού ημιάξονα Οx κατά τη χρονική στιγμή t = 1s.

β) του υλικού σημείου του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = \frac{29}{3}m$, σε συνάρτηση με το χρόνο.

v) Να κατασκευάσετε το στιγμιότυπο του κύματος για $x \geq 0$ τη χρονική στιγμή $t = \frac{13}{12}s$.

Δίνονται τα x_0 σε κάθε περίπτωση 2/3 m, 5/3 m και 8/3 m, αντίστοιχα (ώστε σε κάθε περίπτωση να έχουμε την ίδια απάντηση για το μήκος κύματος λ= 2m)

Περιπτώσεις 1 και 3

Το τελευταίο σημείο Κ, στο οποίο έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή t=0, έχει y=0 και $V_T<0$. Η εξίσωση ταλάντωσης (εξίσωση αναφοράς) του σημείου Κ είναι:

$$y_K = 0{,}04\eta\mu(10\pi t+\pi) \quad (1.2)$$

Για το τυχαίο σημείο Σ στη θέση x, δεξιά του Κ, ισχύει: $y = A\eta\mu\left[\omega(t-\frac{x-x_0}{\upsilon})+\pi\right]$

$$y = A\eta\mu[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\pi+\frac{2\pi x_0}{\lambda}] \rightarrow y = 0{,}04\eta\mu[2\pi\left(5t-\frac{x}{\lambda}\right)+\pi+\frac{2\pi x_0}{\lambda}] \quad (1.3)$$

Για το υλικό σημείο στη θέση x=0 ισχύει: $y_{(0)} = 0{,}04\eta\mu[10\pi t+\pi+\frac{2\pi x_0}{\lambda}]$ (1.4)

Από τις αρχικές συνθήκες: $\left.\begin{matrix}\eta\mu\left(\pi+\frac{2\pi x_0}{\lambda}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{2\pi x_0}{\lambda}\right) > 0\end{matrix}\right\} \xrightarrow{4o\ \tau\varepsilon\tau\alpha\rho\tau.} \frac{2\pi x_0}{\lambda}+\pi = 2k\pi+\frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3x_0}{3k+1}$ (1.5)

Στην 1η περίπτωση για x_0 = 2/3 m και k = 0, προκύπτει λ = 2m και υ=λf ➔ υ = 10m/s.

Από την (1.4) προκύπτει: $\boxed{y_{(0)} = 0{,}04\eta\mu[10\pi t+\frac{5\pi}{3}]}$ (1.6)

Στην *περίπτωση 3* παρατηρούμε ότι η αρχή Ο μέχρι τη χρονική στιγμή t=0, έχει περάσει από τη θέση $y = -2\sqrt{3}cm$ με $V_T > 0$ δύο φορές.

Επομένως δίνουμε στην (1.5) τις τιμές: x_0 = 8/3 m και k = 1, οπότε προκύπτει λ=2m και υ=λf ➔ υ = 10m/s.

Από την (1.4) προκύπτει: $\boxed{y_{(0)} = 0{,}04\eta\mu[10\pi t+\frac{11\pi}{3}]}$ (1.7)

(Η αρχική φάση: $\varphi_0 = 2\pi+5\pi/3$)

Περίπτωση 2.

Το τελευταίο σημείο Κ, στο οποίο έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή t=0, έχει y=0 και $V_T>0$. Η εξίσωση ταλάντωσης (εξίσωση αναφοράς) του σημείου Κ είναι:

$$y_K = 0{,}04\eta\mu(10\pi t) \quad (2.2)$$

Για το τυχαίο σημείο Σ στη θέση x, δεξιά του Κ, ισχύει: $y = A\eta\mu\left[\omega(t-\frac{x-x_0}{\upsilon})\right]$

$$y = A\eta\mu[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{2\pi x_0}{\lambda}] \rightarrow y = 0{,}04\eta\mu[2\pi\left(5t-\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{2\pi x_0}{\lambda}] \quad (2.3)$$

Για το υλικό σημείο στη θέση x=0 ισχύει: $y_{(0)} = 0{,}04\eta\mu[10\pi t+\frac{2\pi x_0}{\lambda}]$ (2.4)

Από τις αρχικές συνθήκες: $\left.\begin{matrix}\eta\mu\left(\frac{2\pi x_0}{\lambda}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_0}{\lambda}\right) > 0\end{matrix}\right\} \xrightarrow{4o\ \tau\varepsilon\tau\alpha\rho\tau.} \frac{2\pi x_0}{\lambda} = 2k\pi+\frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6x_0}{6k+5}$ (2.5)

Για x_0 = 5/3 m και k = 0, προκύπτει λ = 2m και υ=λf ➔ υ = 10m/s.

Από την (2.4) προκύπτει: $\boxed{y_{(0)} = 0{,}04\eta\mu[10\pi t+\frac{5\pi}{3}]}$ (2.6)

(Όμοια με την αντίστοιχη εξίσωση της 1ης περίπτωσης)

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ

Περίπτωση 1.

Από τη σχέση (1.3): $y = 0{,}04\eta\mu[2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \pi + \frac{4\pi}{6}] \Leftrightarrow y = 0{,}04\eta\mu[2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \frac{5\pi}{3}]$ (S.I)

Περίπτωση 2.

Από τη σχέση (2.3): $y = 0{,}04\eta\mu[2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \frac{5\pi}{3}]$ (S.I)

Περίπτωση 3.

Από τη σχέση (1.3): $y = 0{,}04\eta\mu[2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \pi + \frac{8\pi}{3}] \Leftrightarrow y = 0{,}04\eta\mu[2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \frac{11\pi}{3}]$ (S.I)

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΦΑΣΗΣ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗΣ - ΘΕΣΗΣ

Περίπτωση 1.

Τη χρονική στιγμή t = 1s το κύμα θα έχει μετατοπιστεί κατά Δx = υt = 10m, επομένως θα έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x = \frac{2}{3} + 10 = \frac{32}{3}\ m$.

Φ(x,t) = $2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow \Phi(x, 1s) = \frac{35\pi}{3} - \pi x \ \ (S.I)$, με $0 \le x \le \frac{32}{3} m$. (D1)

[Παρατηρούμε ότι $\Phi\left(\frac{32}{3}m, 1s\right) = \pi$.]

Περίπτωση 2.

Τη χρονική στιγμή t = 1s το κύμα θα έχει μετατοπιστεί κατά Δx = υt = 10m, επομένως θα έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x = \frac{5}{3} + 10 = \frac{35}{3}\ m$.

Φ(x,t) = $2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow \Phi(x, 1s) = \frac{35\pi}{3} - \pi x \ \ (S.I)$, με $0 \le x \le \frac{35}{3} m$. (D2)

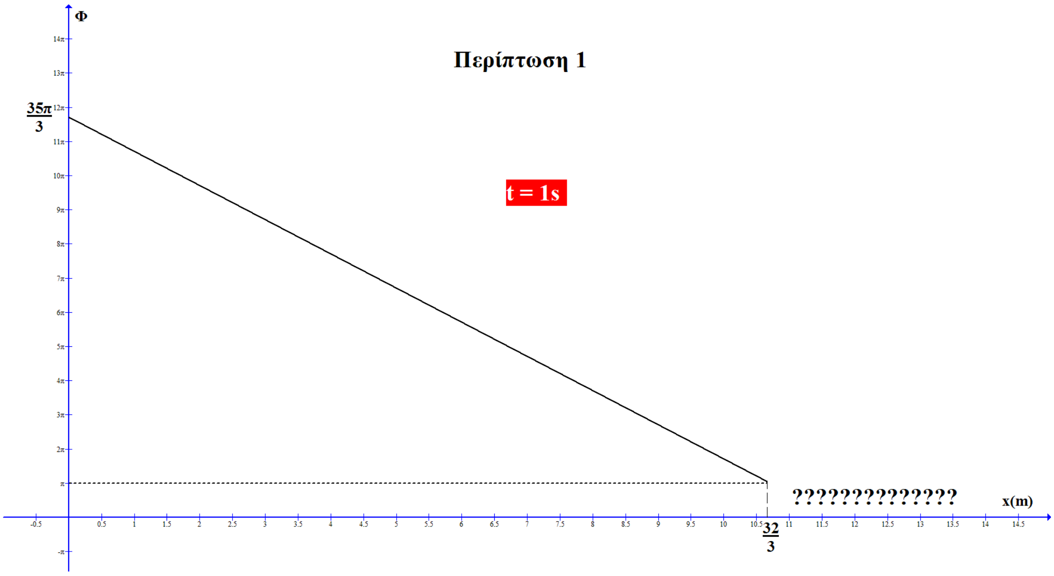
[Παρατηρούμε ότι $\Phi\left(\frac{35}{3}m, 1s\right) = 0$.]

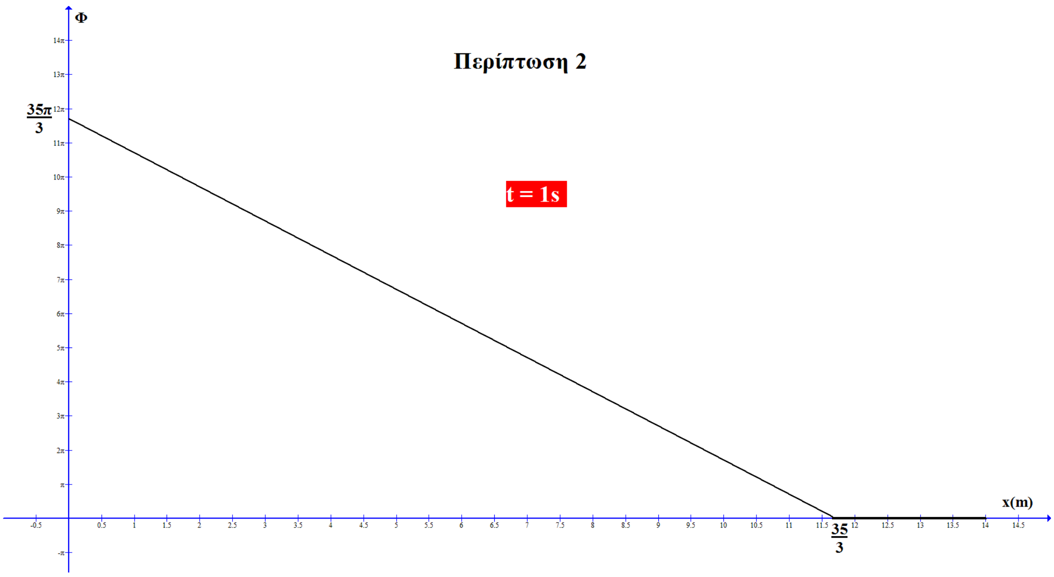
Περίπτωση 3.

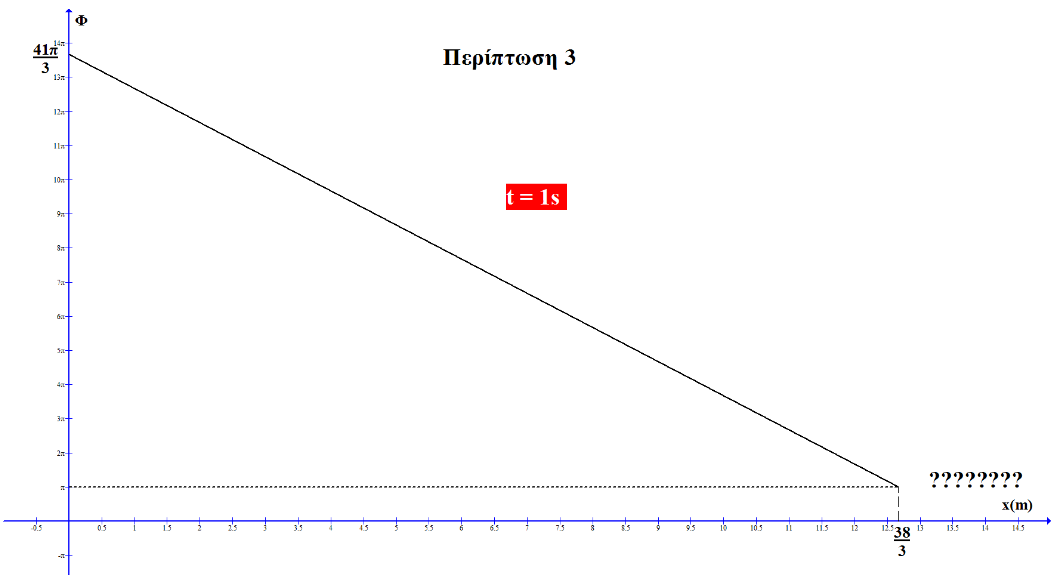
Τη χρονική στιγμή t = 1s το κύμα θα έχει μετατοπιστεί κατά Δx = υt = 10m, επομένως θα έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x = \frac{8}{3} + 10 = \frac{38}{3}\ m$.

Φ(x,t) = $2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \frac{11\pi}{3} \Leftrightarrow \Phi(x, 1s) = \frac{41\pi}{3} - \pi x \ \ (S.I)$, με $0 \le x \le \frac{38}{3} m$. (D3)

[Παρατηρούμε ότι $\Phi\left(\frac{38}{3}m, 1s\right) = \pi$.]


Φ
Περίπτωση 1
$\frac{35\pi}{3}$
t = 1s
??????????????
x(m)
$\frac{32}{3}$


Φ
Περίπτωση 2
$\frac{35\pi}{3}$
t = 1s
x(m)
$\frac{35}{3}$


Φ
Περίπτωση 3
$\frac{41\pi}{3}$
t = 1s
????????
x(m)
$\frac{38}{3}$

ΦΑΣΗΣ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗΣ - ΧΡΟΝΟΥ

Περίπτωση 1.

Το σημείο στη θέση 29/3 m θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $\tau = \frac{\Delta x}{\upsilon} = \frac{\frac{29}{3}-\frac{2}{3}}{10}s = 0{,}9s$.

$$\Phi(x,t) = 2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{29}{3}m, t\right) = 10\pi t - 8\pi, \text{ με } t \geq 0{,}9s.$$

Περίπτωση 2.

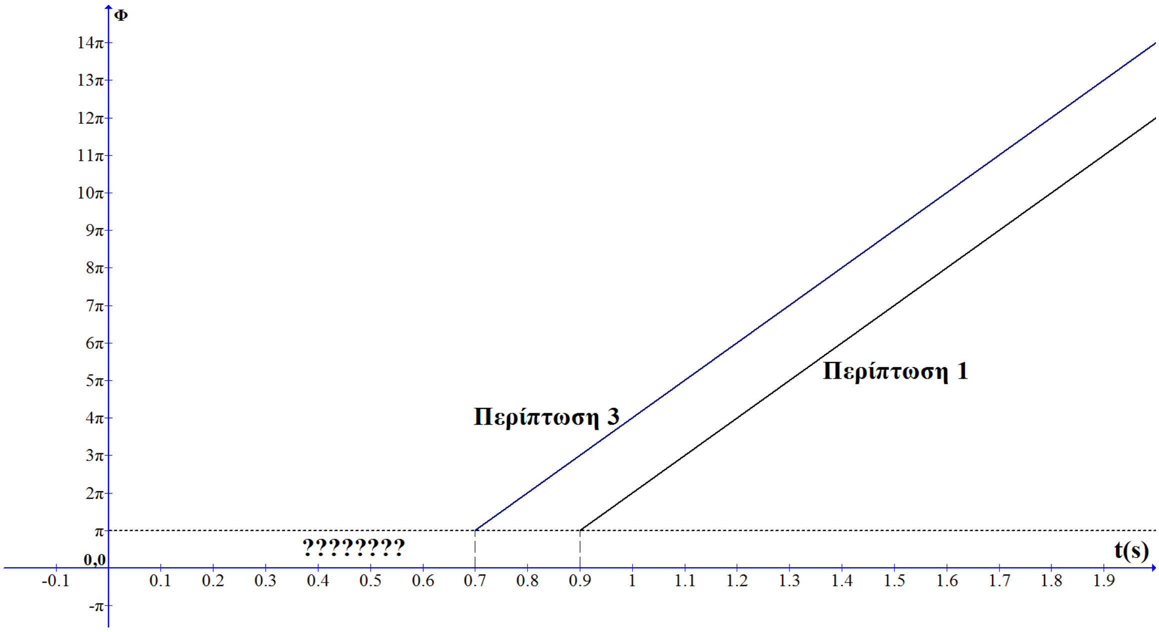
Το σημείο στη θέση 29/3 m θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $\tau = \frac{\Delta x}{\upsilon} = \frac{\frac{29}{3}-\frac{5}{3}}{10}s = 0{,}8s$.

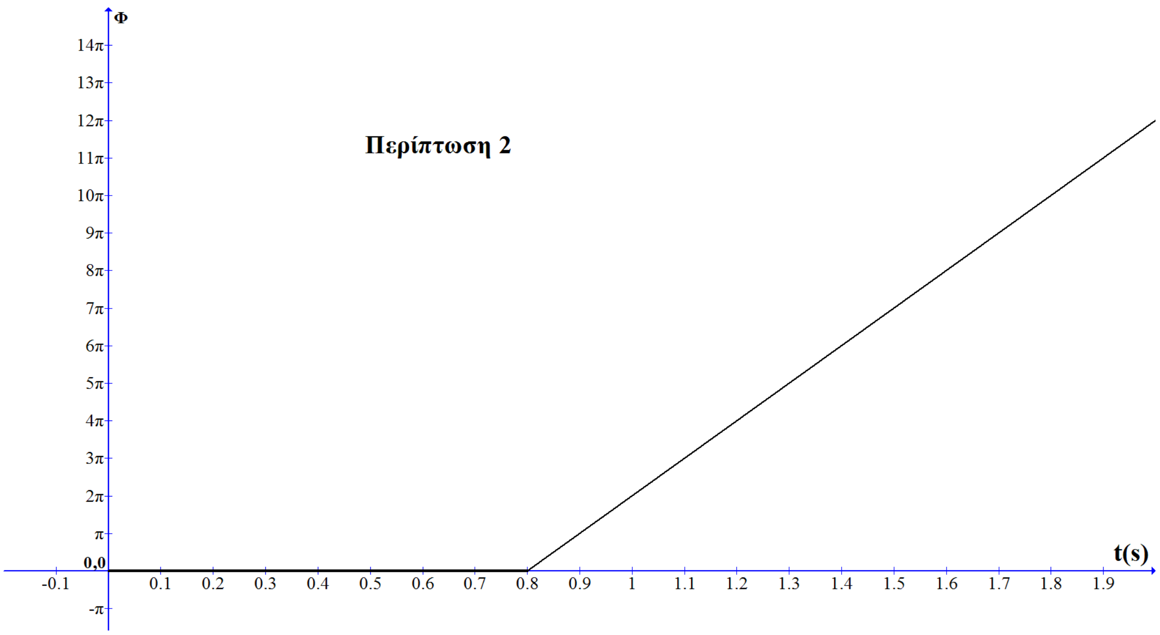
$$\Phi(x,t) = 2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{29}{3}m, t\right) = 10\pi t - 8\pi, \text{ με } t \geq 0{,}8s.$$

Περίπτωση 3.

Το σημείο στη θέση 29/3 m θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $\tau = \frac{\Delta x}{\upsilon} = \frac{\frac{29}{3}-\frac{8}{3}}{10}s = 0{,}7s$.

$$\Phi(x,t) = 2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \frac{11\pi}{3} \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{29}{3}m, t\right) = 10\pi t - 6\pi, \text{ με } t \geq 0{,}7s.$$



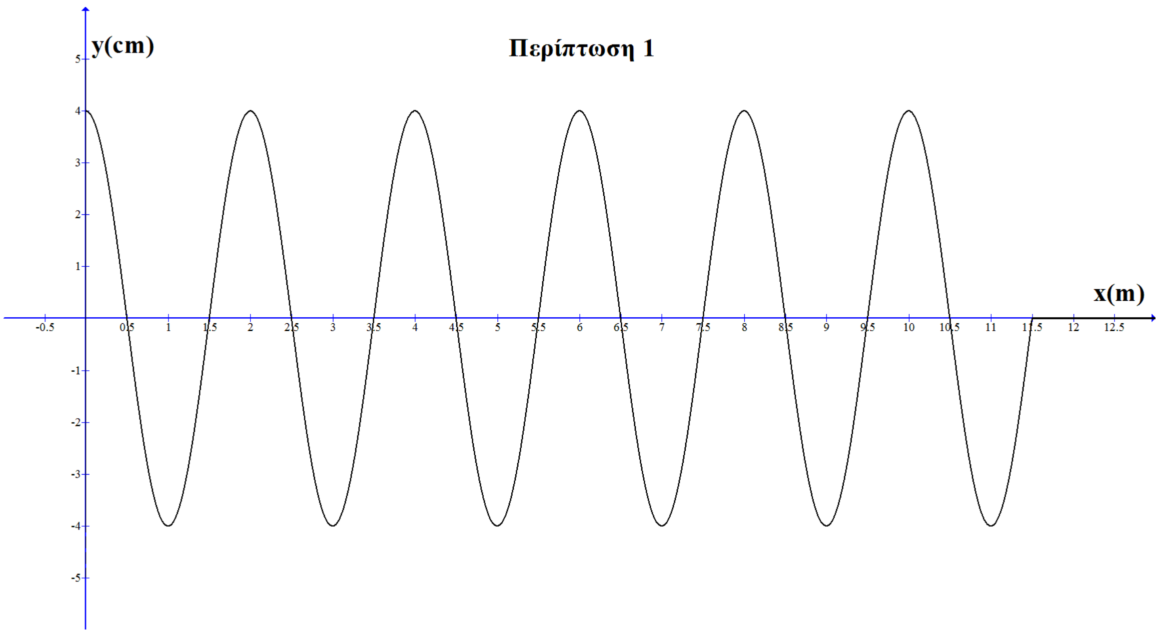


ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ ΚΥΜΑΤΟΣ την $t = \frac{13}{12}\,s$

<u>Περίπτωση 1.</u>

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{13}{12}\,s$ το κύμα θα έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = \upsilon \Delta t = \frac{65}{6}\,m$ επομένως θα έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x = \frac{2}{3} + \frac{65}{6} = \frac{69}{6} = 11{,}5\ m$

$$y = 0{,}04\eta\mu[2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \frac{5\pi}{3}] \Rightarrow y = 0{,}04\eta\mu\left(10\pi t - \pi x + \frac{5\pi}{3}\right)] \Rightarrow y = 0{,}04\eta\mu(12{,}5\pi - \pi x)$$



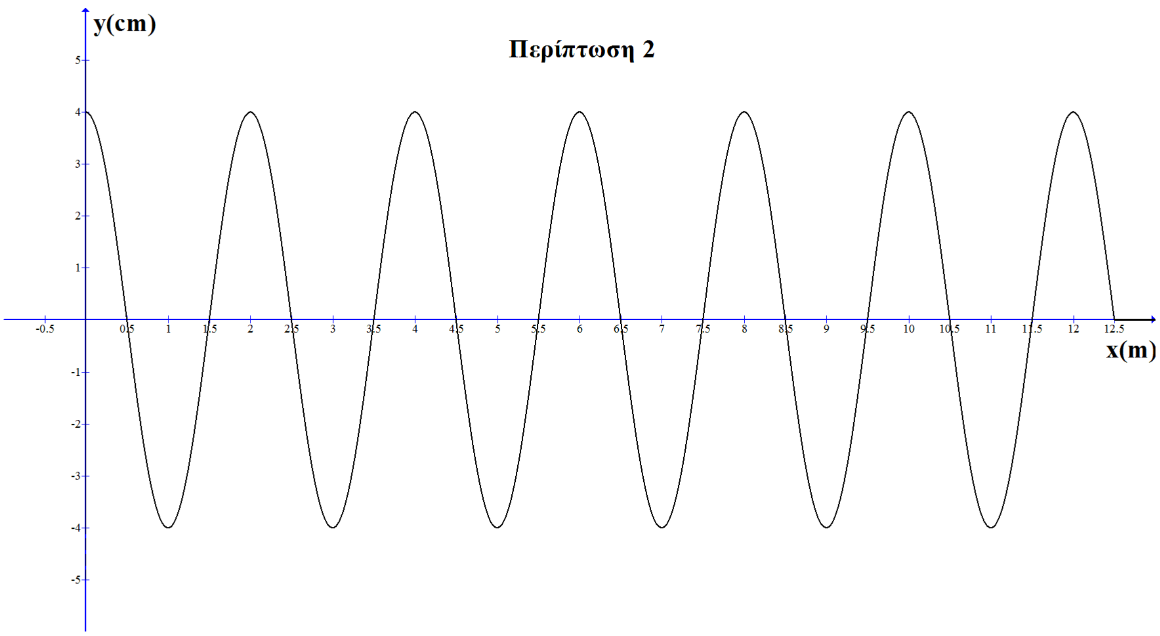
$$\Rightarrow y = 0{,}04\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) \Rightarrow y = 0{,}04\sigma\upsilon\nu(\pi x)\ \ (S.I)\ \text{με}\ 0 \le x \le 11.5m$$

Περίπτωση 2.

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{13}{12} s$ το κύμα θα έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = \upsilon \Delta t = \frac{65}{6} m$ επομένως θα έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x = \frac{5}{3} + \frac{65}{6} = \frac{75}{6} = 12{,}5\ m$

$$y = 0{,}04\eta\mu[2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \frac{5\pi}{3}] \Rightarrow y = 0{,}04\eta\mu\left(10\pi t - \pi x + \frac{5\pi}{3}\right)] \Rightarrow y = 0{,}04\eta\mu(12{,}5\pi - \pi x)$$

$$\Rightarrow y = 0{,}04\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) \Rightarrow y = 0{,}04\sigma\upsilon\nu(\pi x)\ (S.I) \text{ με } 0 \le x \le 12.5m$$

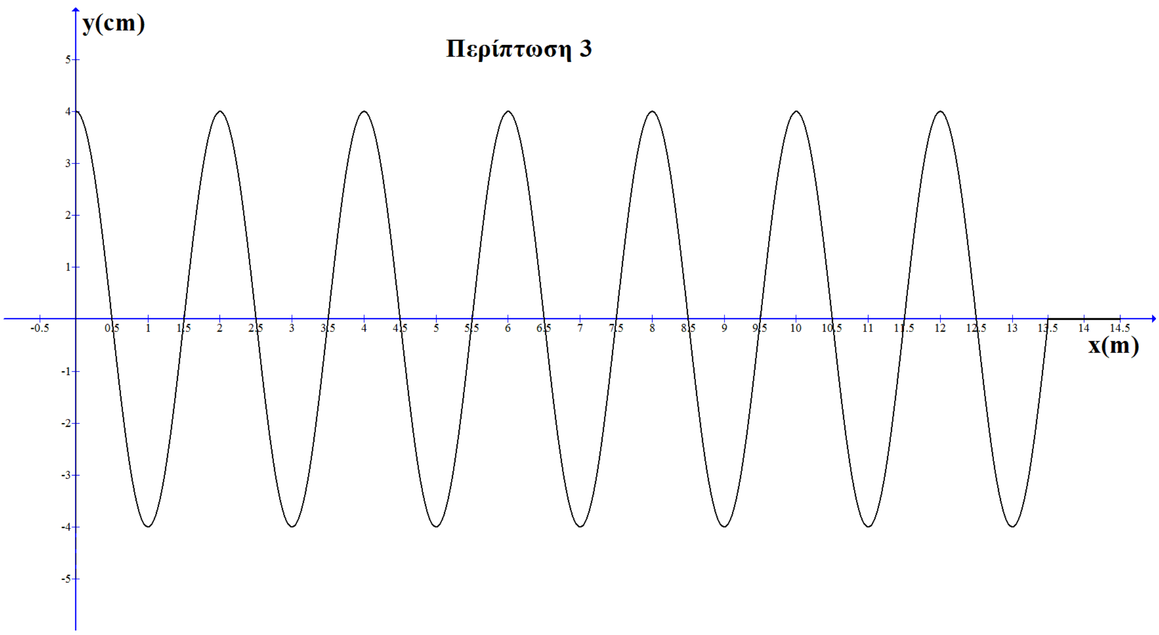


Περίπτωση 3.

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{13}{12} s$ το κύμα θα έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = \upsilon \Delta t = \frac{65}{6} m$ επομένως θα έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x = \frac{8}{3} + \frac{65}{6} = \frac{81}{6} = 13{,}5\ m$

$$y = 0{,}04\eta\mu[2\pi\left(5t - \frac{x}{2}\right) + \frac{11\pi}{3}] \Rightarrow y = 0{,}04\eta\mu\left(10\pi t - \pi x + \frac{11\pi}{3}\right)]$$

$\Rightarrow y = 0{,}04\eta\mu(14{,}5\pi - \pi x) \Rightarrow y = 0{,}04\eta\mu\left(14\pi + \frac{\pi}{2} - \pi x\right) \Rightarrow y = 0{,}04\sigma\upsilon\nu(\pi x)$ (S.I) με $0 \le x \le 13.5m$



Ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης είναι και ο εξής:

Η διαφορά φάσης μεταξύ της αρχής Ο και του πρώτου σημείου που έχει y = 0 μετά το Ο είναι φ_0, αν το σημείο αυτό έχει $V_T > 0$ ή $\varphi_0 - \pi$, αν το σημείο αυτό έχει $V_T < 0$. Αν x_1 είναι η θέση του σημείου αυτού, τότε από τη σχέση $\Phi_{(O)} - \Phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}x_1$ υπολογίζουμε το x_1 σε συνάρτηση με το λ και από το δοσμένο στιγμιότυπο το λ.

Π.χ. για την περίπτωση 2 είναι $\Phi_{(O)} - \Phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}x_1 \Leftrightarrow \frac{5\pi}{3} - \pi = \frac{2\pi}{\lambda}x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\lambda}{3}$

Από το σχήμα: $x_0 = x_1 + \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow x_0 = \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6x_0}{5} \Rightarrow \lambda = 2\,m$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Σταύρος Κουσίδης