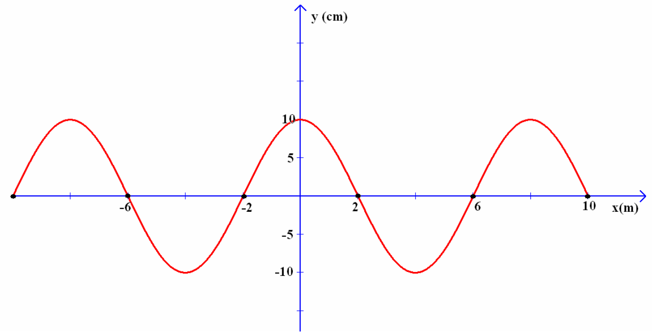
Στάσιμο κύμα σε χορδή. Στιγμιότυπα.

Σε χορδή την t_0=0 έχει ήδη δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Στο σχήμα φαίνεται ένα τμήμα του στιγμιότυπου του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_1=T/12, όπου T η περίοδος ταλάντωσης της χορδής. Την χρονική στιγμή t_0=0 όλα τα σημεία της χορδής βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους . Τα κύματα που συμβάλλουν για να δώσουν το στάσιμο κύμα έχουν περίοδο T=12 s .



i) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κυμάτων που συμβάλλουν για να δημιουργήσουν το στάσιμο αυτό κύμα.
ii) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση και την ταχύτητα του σημείου με x=3m , την χρονική στιγμή t_2=4.5 s
iii) Να προσδιορίσετε τον αριθμό των κοιλιών μεταξύ των σημείων x_1=-25m και x_2=+25m
iv) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή 3T/8

Απάντηση:

i) Η γενική μορφή ενός στάσιμου κύματος μπορεί να γραφεί στην μορφή :

$$y=2A\text{συν}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\theta\right)\cdot \text{ημ}\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right) \qquad (1)$$

όπου θ γωνία που καθορίζεται από τις χωρικές αρχικές συνθήκες και φ γωνία που καθορίζεται από τις χρονικές αρχικές συνθήκες.

Σύμφωνα με την άσκηση την t_o=0 όλα σημεία στην θέση ισορροπίας .

Από (1) $0= 2A\text{συν}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\theta\right)\cdot\text{ημ}\varphi \Rightarrow \varphi=0$ ή $\varphi=\pi$

Από το στιγμιότυπο φαίνεται ότι την $t_1=\frac{T}{12}<\frac{T}{4}$ το σημείο x=0 έχει θετική απομάκρυνση. Άρα την t_o=0 έχει θετική ταχύτητα συνεπώς φ=0

Ακόμα την $t_1=\frac{T}{12}$ το σημείο x=0 ανήκει στα σημεία που έχουν την μεγαλύτερη απομάκρυνση . 'Αρα στη θέση x=0 έχουμε κοιλία. Έτσι $\text{συν}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\theta\right)=\pm1$ και επειδή την $t_1=\frac{T}{12}$ η απομάκρυνση είναι θετική έχουμε $\text{συν}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\theta\right)=1$ από όπου θ=0

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι λ/2= 4 m άρα λ=8 m

Άρα η εξίσωση του κύματος είναι της μορφής $y=2A\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi x}{\lambda})\cdot\eta\mu(\frac{2\pi t}{T})$

Από διάγραμμα την $t_1=\frac{T}{12}$ για x=0 έχουμε y=10 cm

$$\text{Άρα } 10 = 2A\sigma\upsilon\nu 0\cdot\eta\mu(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{12}) \Rightarrow \underline{A=10\text{ cm}}$$

Οπότε η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι :

$$y= 20\cdot\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\frac{\pi x}{4}\boldsymbol{\eta\mu}\frac{\pi t}{6} \quad (x \text{ σε m, y σε cm , t σε s})$$

και οι εξισώσεις των κυμάτων που συμβάλλουν:

$$y_1 = 10\cdot\eta\mu 2\pi(\frac{t}{12}-\frac{x}{8})$$

$$y_2 = 10\cdot\eta\mu 2\pi(\frac{t}{12}+\frac{x}{8}) \quad (x \text{ σε m, y σε cm , t σε s})$$

ii) Η εξίσωση του σημείου για x=3 m είναι

$$y= 20\cdot\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\frac{\pi 3}{4}\boldsymbol{\eta\mu}\frac{\pi t}{6} \text{ ή } y =- 10\sqrt{2}\,\boldsymbol{\eta\mu}\frac{\pi t}{6} \quad \text{ ή } \quad y=10\sqrt{2}\ \eta\mu\,(\frac{\pi t}{6}\boldsymbol{+\pi}) \qquad (2)$$

οπότε το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου x=3 m είναι $A'=10\sqrt{2}$ cm

και η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης είναι $\upsilon_{max}=\frac{\pi}{6}\,10\sqrt{2}$ cm/s και η εξίσωση ταχύτητάς του :

$$\upsilon = \frac{10\sqrt{2}\cdot\pi}{6}\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi t}{6}\boldsymbol{+\pi}) \qquad (\upsilon \text{ σε cm/s, t σε s}) \ (3)$$

Αντικαθιστώντας στις (2) και (3) t=4,5 s βρίσκουμε

$$y = -5 \text{ cm και } \upsilon = 10\pi/6 \text{ cm/s}$$

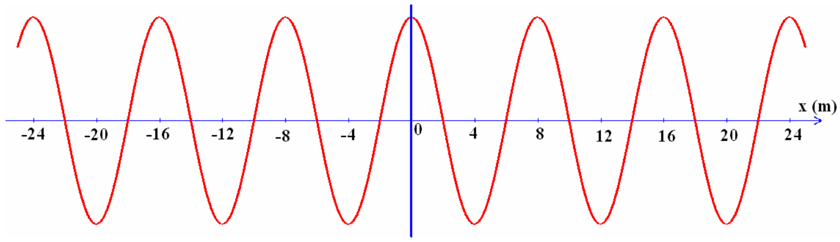
iii) Εφόσον το στάσιμο κύμα είναι της μορφής $y=2A\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi x}{\lambda})\cdot\eta\mu(\frac{2\pi t}{T})$ οι θέσεις των κοιλιώνν θα είναι

$$x_\kappa= N\cdot\frac{\lambda}{2} \text{ ή } x_\kappa=N\cdot 4 \quad (x \text{ σε m}) \quad \text{με } N\in Z$$

Θέλουμε $-25< x_\kappa < +25$ ή $-25< 4N <+25$ ή $-6{,}25< N <+6{,}25$

Άρα $N\in\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0 , 1, 2, 3 , 4, 5, 6\}$ δηλαδή 13 κοιλίες

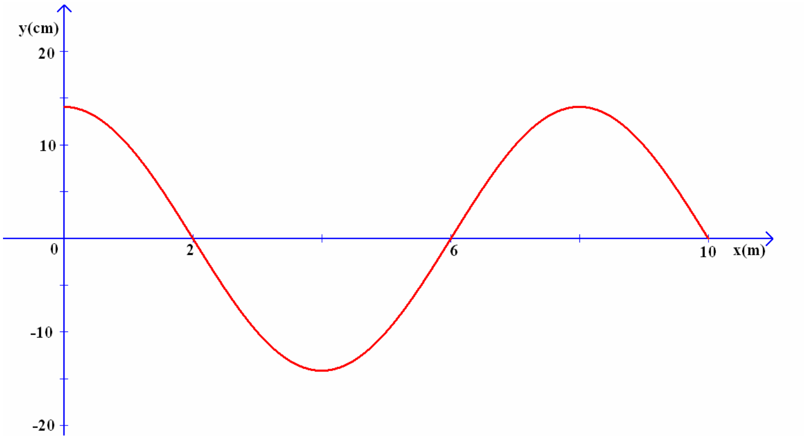
Ένα τμήμα του στιγμιότυπου με τα σημεία στις ακραίες του θέσεις:



iv) Από την εξίσωση του στάσιμου για t=3T/4 έχουμε

$$y = 20 \cdot \textbf{συν}\frac{\pi x}{4}\,\textbf{ημ}\frac{2\pi}{T}\frac{3T}{8} \;\; => \;\; \mathbf{y}=10\sqrt{2}\;\textbf{συν}\frac{\pi x}{4} \quad (\text{ y σε cm, xσε m})$$

οπότε το στιγμιότυπο για 0<x<10m είναι:



Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Χαλκιαδάκης Παναγιώτης