

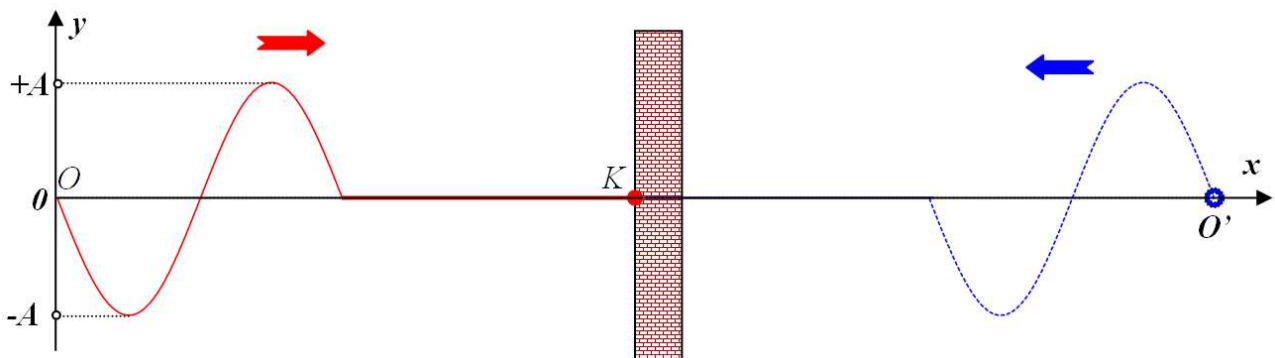
Στάσιμο κύμα σε χορδή

Χορδή μήκους L που ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα Ox έχει στερεωμένο το δεξί της άκρο K στη θέση $x=+L$ του άξονα, ενώ το αριστερό της άκρο O που βρίσκεται στην αρχή του άξονα ($x=0$) αρχίζει την χρονική στιγμή $t=0$ να ταλαντώνεται με εξίσωση απομάκρυνσης $y=A\eta\mu(2\pi ft)$ (S.I.), οπότε αρχίζει να διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα μέτρου u .



α) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή το κύμα φτάνει στο σημείο K και να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

Υποθέστε ότι σε συμμετρικό σημείο O' του O ως προς K του θετικού ημιάξονα Ox βρίσκεται **μία υποθετική (δευτερογενής) πηγή** παραγωγής αρμονικών κυμάτων η οποία αρχίζει να ταλαντώνεται κατακόρυφα την χρονική στιγμή $t=0$ με $u < 0$ και με πλάτος A και συχνότητα f .



β) Ποια η χρονική εξίσωση ταλάντωσης της πηγής O' ;

γ) Ποια χρονική στιγμή το κύμα που προκαλείται από την υποθετική πηγή O' φτάνει στο σημείο K και ποια η εξίσωση αυτού του αρμονικού κύματος;

δ) Να γραφεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται.

ε) Για ποιες τιμές το αριστερό άκρο της χορδής είναι δεσμός και για ποιες κοιλία.

Θεωρώντας $L=0,9m$, $A=0,1m$, $u=3m/s$ και ότι η μέγιστη απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και μίας κοιλίας κατά την διάρκεια ταλάντωσης είναι $d_{max}=0,25m$:

στ) να βρείτε το μήκος κύματος λ και τον συνολικό αριθμό δεσμών σε όλο το μήκος της χορδής.

ζ) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος όταν ολοκληρώνεται η δημιουργία στάσιμου κύματος σε όλη τη χορδή.

η) Να βρείτε την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας του υλικού σημείου Λ που απέχει από το αριστερό άκρο απόσταση $0,5m$ μετά από $0,2s$ από τη στιγμή που ολοκληρώθηκε η συμβολή.

θ) Να βρεθεί κατά πόσο πρέπει να μεταβάλλουμε την συχνότητα των τρέχοντων κυμάτων ώστε να στην χορδή να σχηματιστούν δύο επιπλέον δεσμοί χωρίς να μεταβληθεί η κινητική κατάσταση του αριστερού άκρου Π .

Λύση:

α) Το κύμα φτάνει στο δεξί άκρο K όταν το κύμα διατρέξει απόσταση $\Delta x=L$, οπότε το κύμα φτάνει στο άκρο K την χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{\Delta x}{u} = \frac{L}{u}$$

Εφόσον η εξίσωση ταλάντωσης του άκρου O ταλαντώνεται με εξίσωση $y=A\eta\mu(2\pi ft)=A\eta\mu\omega t$, η εξίσωση του αρμονικού κύματος που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση είναι:

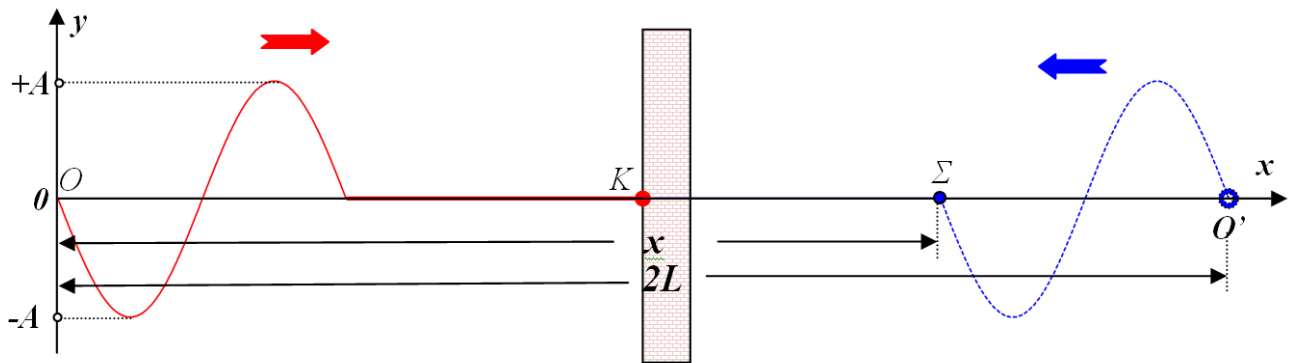
$$y_1 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ για } x \leq u \cdot t$$

β) Η υποθετική πηγή ξεκινά να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή $t=0$ από την θέση ισορροπίας της με $u < 0$, οπότε θα έχει εξίσωση ταλάντωσης:

$$y_{\Pi'} = A\eta\mu(\omega t + \pi)$$

γ) Επειδή η O' απέχει την ίδια απόσταση από το K και επειδή τα δύο κύματα διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα (εφόσον διαδίδονται στο ίδιο μέσο), το κύμα από την O' φτάνει στο σημείο K την χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{\Delta x}{u} = \frac{L}{u}$$



Ένα τυχαίο σημείο Σ αριστερά από την O' στη θέση x του θετικού ημιάξονα ξεκινά να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή:

$$t' = \frac{2L - x}{u}$$

Οπότε η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Σ δηλαδή η εξίσωση του αρμονικού κύματος που διαδίδεται προς τ' αριστερά από την O' είναι:

$$y_2 = A\eta\mu[\omega(t - t') + \pi] = A\eta\mu \left[\omega \left(t - \frac{2L - x}{u} \right) + \pi \right] = A\eta\mu \left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{2L}{u \cdot T} + 2\pi \frac{x}{u \cdot T} + \pi \right)$$

$$y_2 = A\eta\mu \left(2\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{4\pi L}{\lambda} + \pi \right)$$

δ) Μετά την ολοκλήρωση της συμβολής σε όλα τα σημεία της χορδής η απομάκρυνση κάθε σημείου από τη θέση ισορροπίας του θα προκύπτει από την αρχή της επαλληλίας:

$$y = y_1 + y_2 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + A\eta\mu \left(2\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{4\pi L}{\lambda} + \pi \right)$$

Γνωρίζουμε ότι: $\eta\mu A + \eta\mu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$, οπότε έχουμε:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - \left(2\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{4\pi L}{\lambda} + \pi \right)}{2} \eta\mu \frac{2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \left(2\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{4\pi L}{\lambda} + \pi \right)}{2}$$

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu \left(-\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{2\pi L}{\lambda} - \frac{\pi}{2} \right) \eta\mu \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi L}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

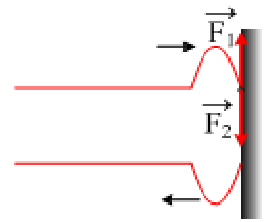
$$y = 2A \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi L}{\lambda}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi L}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y = 2A \eta \mu \frac{2\pi}{\lambda} (L - x) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi L}{\lambda}\right) \text{ για } t \geq \frac{2L}{u}$$

Στην παραπάνω εξίσωση οι μεταβλητές x και t δεν βρίσκονται στον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό και αντιστοιχεί σε στάσιμο κύμα.

Εξάλλου μην ξεχνάμε ότι το κύμα αυτό προέκυψε από την συμβολή δύο κυμάτων ίδιου πλάτους A και συχνότητας f που διαδίδονται στο ίδιο γραμμικό μέσο (χορδή) προς αντίθετες κατευθύνσεις. Φυσικά στην πραγματικότητα το προς τ' αριστερά κύμα δεν δημιουργείται από υποθετική πηγή αλλά από την ανάκλαση του προσπίπτοντος στο δεξιό άκρο K .

Φτάνοντας το προς τα δεξιά κύμα στο άκρο K της χορδής, ασκεί στον τοίχο μια δύναμη F_1 με φορά προς τα πάνω. Άρα με βάση την αρχή δράσης - αντίδρασης, δέχεται μια ίσου μέτρου δύναμη F_2 με φορά προς τα κάτω. Το αποτέλεσμα είναι στην επιστροφή αντί για «όρος» να δημιουργείται «κοιλιά», όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Από Μαθηματική άποψη, το παραπάνω συμπέρασμα σημαίνει ότι μεταξύ προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος παρουσιάζεται διαφορά φάσεως ίση με π . Με την θεώρηση της συμμετρικής υποθετικής πηγής που ξεκινά να ταλαντώνεται την $t=0$ με φορά προς τα κάτω, στο άκρο K φτάνει κύμα από την O' που το εξαναγκάζει να κινηθεί προς τα κάτω, οπότε στο σημείο αυτό δημιουργείται δεσμός.

ε) Το αριστερό άκρο της χορδής $O(x=0)$ θα έχει πλάτος ταλάντωσης:

$$|A'| = 2A \left| \eta \mu \frac{2\pi L}{\lambda} \right|$$

Για να δημιουργείται κοιλία στο σημείο O πρέπει:

$$|A'| = 2A \Rightarrow \left| \eta \mu \frac{2\pi L}{\lambda} \right| = 1 \Rightarrow \eta \mu \frac{2\pi L}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \frac{2\pi L}{\lambda} = (2N + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = (2N + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Αηλαδή όταν το μήκος L της χορδής είναι περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/4$.

Για να δημιουργείται δεσμός στο σημείο Π πρέπει:

$$|A'| = 0 \Rightarrow \left| \eta \mu \frac{2\pi L}{\lambda} \right| = 0 \Rightarrow \eta \mu \frac{2\pi L}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi L}{\lambda} = N\pi \Rightarrow L = 2N \frac{\lambda}{4}$$

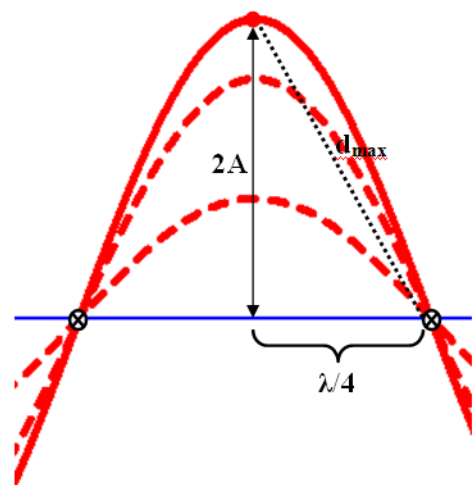
Αηλαδή όταν το μήκος L της χορδής είναι άρτιο πολλαπλάσιο του $\lambda/4$.

στ) Η οριζόντια απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της επόμενης κοιλίας είναι $\lambda/4$. Η κοιλία κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης θα βρεθεί σε μέγιστη εγκάρσια απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας της όταν βρεθεί στην πάνω στην κάτω ακραία θέση ταλάντωσης οπότε θα είναι $y_{\max} = 2A = 0,2\text{m}$.

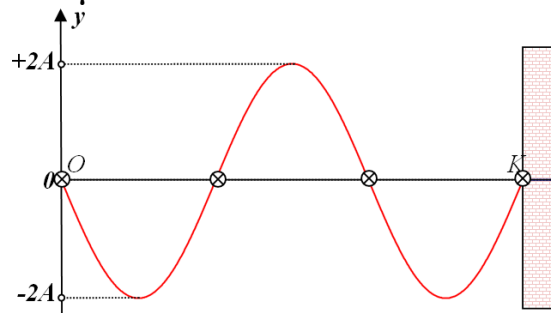
Όπως προκύπτει και από το διπλανό σχήμα:

$$\begin{aligned} d_{\max}^2 &= \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 + y_{\max}^2 \Rightarrow d_{\max}^2 = \frac{\lambda^2}{16} + y_{\max}^2 \Rightarrow \lambda^2 \\ &= 16(d_{\max}^2 - y_{\max}^2) \\ &= 16(0,0625 - 0,04) \end{aligned}$$

$$\lambda = 0,6\text{m}$$



Παρατηρούμε ότι: $\frac{L}{\lambda/4} = \frac{0,9}{0,15} = 6$ (άρτιος) άρα στο σημείο Ο δημιουργείται δεσμός και συνολικά επειδή $L = 3\frac{\lambda}{2}$ δηλαδή συνολικά σχηματίζονται 3 άτρακτοι, στην χορδή θα υπάρχουν συνολικά (μαζί με τα σημεία Ο και Κ) **4 δεσμοί**.



ζ) Από το θεμελιώδη νόμο της κυματικής:

$$u = \lambda \cdot f \Rightarrow f = 5\text{Hz}$$

Οπότε $\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Θα είναι:

$$y = 2A\eta\mu \frac{2\pi}{\lambda} (L - x) \sigma\upsilon\nu \left(\omega t - \frac{2\pi L}{\lambda} \right) = 0,2\eta\mu \frac{2\pi}{0,6} (0,9 - x) \sigma\upsilon\nu \left(10\pi t - \frac{2\pi \cdot 0,9}{0,6} \right)$$

$$y = 0,2\eta\mu \left(3\pi - \frac{10\pi x}{3} \right) \sigma\upsilon\nu (10\pi t - 3\pi)$$

$$\boxed{y = -0,2\eta\mu \left(\frac{10\pi x}{3} \right) \sigma\upsilon\nu (10\pi t)}$$

η) Η συμβολή ολοκληρώνεται την χρονική στιγμή $t = \frac{2L}{u} = \frac{1,8}{3} = 0,6\text{s}$. Για $x_{\Lambda} = +0,5\text{m}$ και $t = 0,6 + 0,2 = 0,8\text{s}$ έχουμε:

$$y = -0,2\eta\mu \left(\frac{10\pi \cdot 0,5}{3} \right) \sigma\upsilon\nu (10\pi \cdot 0,8) = -0,2\eta\mu \frac{5\pi}{3} \sigma\upsilon\nu 8\pi \Rightarrow \boxed{y = +0,1\sqrt{3}\text{m}}$$

θ) Μεταβάλλοντας την συχνότητα των τρέχοντων κυμάτων μεταβάλλεται το μήκος κύματος. Τώρα θέλουμε να δημιουργούνται στην χορδή συνολικά (μαζί με τα Ο και Κ) 4+2=6 δεσμοί οπότε θα υπάρχουν 5 άτρακτοι. Άρα:

$$L = 5 \frac{\lambda'}{2} = 5 \frac{u}{2f'} \Rightarrow f' = \frac{5u}{2L} = \frac{15}{1,8} \Rightarrow \boxed{f' = \frac{25}{3}\text{Hz}}$$

Άρα:

$$\Delta f = f' - f = \frac{25}{3} - 5 \Rightarrow \boxed{\Delta f = \frac{10}{3}\text{HZ}}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Πέτρος Καραπέτρος