

Εξισώσεις κυμάτων και συμβολή τους.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά (προς την θετική κατεύθυνση), διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, το οποίο φτάνει τη στιγμή $t_0 = 0$, στο σημείο O, στη θέση $x=0$. Το σημείο O αρχίζει την ταλάντωσή του από την θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση και φτάνει στην ακραία θέση της ταλάντωσής του τη στιγμή $t_1 = 0,5s$, ενώ στο μεταξύ το κύμα έχει διαδοθεί κατά $0,25m$, δεξιότερα του O. Η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων ταλάντωσης του O είναι $0,4m$.

- i) Να υπολογιστούν η περίοδος, το πλάτος και το μήκος του κύματος.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- iii) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 3s$, για τα σημεία του θετικού ημιιάξονα.

Κατά μήκος του ίδιου ελαστικού μέσου, διαδίδεται ταυτόχρονα ένα δεύτερο κύμα, από δεξιά προς τα αριστερά, με την ίδια συχνότητα και πλάτος, το οποίο τη στιγμή $t_0 = 0$ φτάνει σε ένα σημείο K, στη θέση $x_K = 3,5m$, το οποίο επίσης αρχίζει να ταλαντώνεται προς την θετική κατεύθυνση.

- iv) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος αυτού.
- v) Τα δύο κύματα συμβάλλουν και έτσι προκύπτει ένα στάσιμο κύμα. Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών στην περιοχή $0 \leq x \leq 3,5m$
- vi) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στην παραπάνω περιοχή τη χρονική στιγμή $t_3 = 9s$.

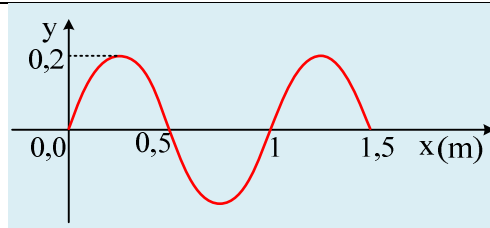
Απάντηση:

- i) Το σημείο O ξεκινά από την θέση ισορροπίας και για να φτάσει στην ακραία θέση περνά χρόνος $T/4$ συνεπώς $T = 2s$, στον ίδιο χρόνο το κύμα διαδίδεται κατά $\lambda/4 = 0,25m$ ή $\lambda = 1m$, ενώ αφού οι δύο ακραίες θέσεις απέχουν $0,4m$, σημαίνει ότι $2A = 0,4m$ ή $A = 0,2m$.
- ii) Το σημείο στη θέση $x=0$ ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση συνεπώς ισχύει η εξίσωση $y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$, άρα:

$$y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - x \right) \quad t \geq 0 \text{ και } x \leq \frac{1}{2}t \text{ μονάδες στο S.I.} \quad (1)$$

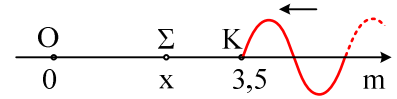
- iii) Θέτοντας στην (1) $t = 3s$ παίρνουμε $y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi \left(\frac{3}{2} - x \right) = 0,2\eta\mu 2\pi x$.

Μέχρι ποιο σημείο θα χαράξουμε την γραφική παράσταση; Το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα $v = \lambda \cdot f = \lambda/T = 0,5m/s$, συνεπώς σε χρονικό διάστημα t_3 έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $x = vt = 1,5m/s$ και το στιγμιότυπο έχει τη μορφή του παρακάτω σχήματος.



iv) Το σημείο Κ ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$y = A\eta\mu\frac{2\pi t}{T} = 0,2\eta\mu\pi t. \text{ Ένα τυχαίο σημείο } \Sigma, \text{ στη θέση } x, \text{ θα}$$



καθυστερήσει να ταλαντωθεί κατά χρονικό διάστημα $t' = \frac{d}{v} = \frac{3,5 - x}{0,5} s$, οπότε η εξίσωση ταλάντωσής

του είναι:

$$y_2 = 0,2\eta\mu\pi(t-t') = 0,2\eta\mu\pi\left(t - \frac{3,5 - x}{0,5}\right) = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + x - 3,5\right), t \geq 0 \text{ και } x \geq \frac{7-t}{2} \quad (2)$$

v) Με βάση την αρχή της επαλληλίας, για τη συμβολή των δύο κυμάτων έχουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - x\right) + 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + x - 3,5\right) \text{ ή}$$

$$y = 0,4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t - 2\pi x - \pi t - 2\pi x + 7\pi}{2} \eta\mu\frac{\pi t - 2\pi x + \pi t + 2\pi x - 7\pi}{2} = 0,4\sigma\upsilon\nu(2\pi x - 3,5\pi) \cdot \eta\mu(\pi t - 3,5\pi)$$

$$\text{Ή } y = -0,4 \cdot \eta\mu 2\pi x \cdot \sigma\upsilon\nu\pi t \quad (3)$$

Δεσμοί είναι τα σημεία όπου $A = |0,4 \cdot \eta\mu 2\pi x| = 0$ ή $2\pi x = k\pi$ ή $x = \frac{1}{2}k$, ενώ και $x \leq 3,5m$. Έτσι οι θέσεις των δεσμών είναι: $x = 0, 0,5m, 1m, 1,5m, 2m, 2,5m, 3m, 3,5m$.

vi) Το χρονικό διάστημα για να φτάσει το πρώτο κύμα στο σημείο Κ, στη θέση $x = 3,5m$ είναι

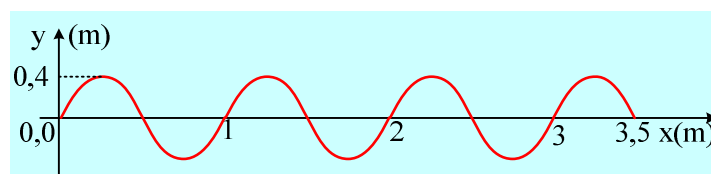
$$t_4 = \frac{d}{v} = \frac{x}{v} = 7s, \text{ συνεπώς τη στιγμή } t_3 = 9s \text{ έχει σχηματισθεί στάσιμο κύμα σε όλη την περιοχή:}$$

$$0 \leq x \leq 3,5m$$

Αντικαθιστώντας $t = 9s$ στην (3) παίρνουμε:

$$y = -0,4 \cdot \eta\mu 2\pi x \cdot \sigma\upsilon\nu\pi t = -0,4 \cdot \eta\mu 2\pi x \cdot \sigma\upsilon\nu 9\pi = 0,4 \cdot \eta\mu 20\pi x,$$

οπότε το ζητούμενο στιγμιότυπο, είναι αυτό του παρακάτω διαγράμματος.



Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης