

Δυο κύματα προς την ίδια κατεύθυνση.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος $A=0,2\text{m}$ και την ίδια συχνότητα $f=2\text{Hz}$. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι ίση με $v=2\text{m/s}$. Σε ένα σημείο O , το οποίο θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων ($x=0$), το πρώτο κύμα φτάνει κατά τη χρονική στιγμή $t=0$ και το δεύτερο κύμα κατά τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$. Θεωρείστε ότι εξαιτίας κάθε κύματος το σημείο O αρχίζει να κινείται προς την θετική φορά.

- i) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας των σημείων του μέσου, του θετικού ημιιάξονα, μετά από τη συμβολή των δύο κυμάτων.
- ii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου, για $x>0$, τη χρονική στιγμή $t_2=2\text{s}$
- iii) Ποιο το αντίστοιχο διάγραμμα αν το δεύτερο κύμα έφτανε στο σημείο O τη χρονική στιγμή $t_1'=0,25\text{s}$;

Απάντηση:

Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε $v=\lambda f \rightarrow \lambda=v/f=1\text{m}$

- i) Η εξίσωση του πρώτου κύματος που φτάνει τη στιγμή $t=0$ στη θέση $x=0$, θα είναι:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x) \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } x \leq 2t \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου O εξαιτίας του δεύτερου κύματος θα είναι $y=A \cdot \eta\mu\omega(t-1)$ ή $y=A \cdot \eta\mu 2\pi(2t-2)$, συνεπώς η εξίσωση του δεύτερου κύματος θα είναι της μορφής:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - 2 \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 2) \quad \text{με } t \geq 1\text{s} \text{ και } x \leq 2t-2 \text{ μονάδες στο (S.I.)} \quad (2)$$

Όταν τα δύο κύματα φτάνουν στο ίδιο σημείο, συμβάλλουν και από την αρχή της επαλληλίας έχουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{2t - x - 2t + x + 2}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{2t - x + 2t - x - 2}{2} \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 1) \quad \text{ή}$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 1) \quad \text{με } t \geq 1\text{s} \text{ και } x \leq 2t-2 \text{ μονάδες στο (S.I.)}^1 \quad (3)$$

- ii) Έτσι τη χρονική στιγμή $t_2=2\text{s}$, θα έχουμε συμβολή στην περιοχή $0 \leq x \leq 2\text{m}$ και η παραπάνω εξίσωση δίνει:

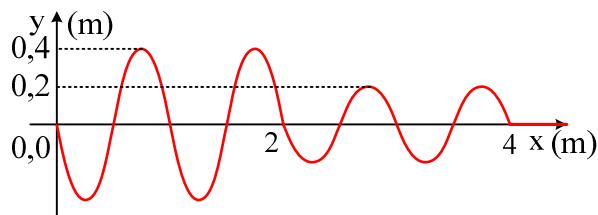
$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 1) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (4 - x - 1) = 0,4 \cdot \eta\mu (6\pi - 2\pi x) \quad \text{ή}$$

$$y = -0,4 \cdot \eta\mu 2\pi x$$

Εξάλλου στην περιοχή $2\text{m} \leq x \leq 4\text{m}$ έχει φτάσει το πρώτο κύμα, αλλά όχι το δεύτερο και η απομάκρυνση των διαφόρων σημείων είναι:

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x) = 0,2 \cdot \eta\mu (8\pi - 2\pi x) = -0,2 \cdot \eta\mu (2\pi x)$$

Με βάση αυτά η μορφή του μέσου, είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



iii) Αν το δεύτερο κύμα έφτανε στη θέση $x=0$ τη στιγμή $t_1=0,25s$, τότε αντίστοιχα η εξίσωση του δεύτερου κύματος θα ήταν:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 0,5) \quad \text{με } t \geq 0,25s \text{ και } x \leq 2t - 0,5 \text{ μονάδες στο (S.I.) (4)}$$

Όταν τα δύο κύματα φτάνουν στο ίδιο σημείο, συμβάλουν και από την αρχή της επαλληλίας έχουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{2t - x - 2t + x + 0,5}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{2t - x + 2t - x - 0,5}{2} \rightarrow$$

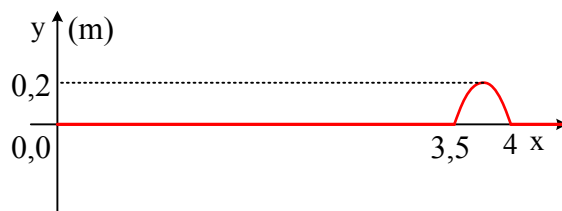
$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{1}{4} \cdot \eta\mu 2\pi \left(2t - x - \frac{1}{4} \right) \quad \text{ή}$$

$$y=0 \quad \text{με } t \geq 0,25s \text{ και } x \leq 2t - 0,5 \text{ μονάδες στο (S.I.)}$$

Οπότε με αντικατάσταση όπου $t=2s$, θα πάρουμε από την παραπάνω εξίσωση για την περιοχή $0 \leq x \leq 3,5m$ θα έχουμε $y=0$, ενώ για την περιοχή $3,5m \leq x \leq 4m$ θα έχει διαδοθεί το πρώτο κύμα και από τη σχέση (4) έχουμε:

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 0,5) = 0,2 \cdot \eta\mu (7\pi - 2\pi x) = 0,2 \cdot \eta\mu\pi (2\pi x)$$

Και το αντίστοιχο στιγμιότυπα είναι;

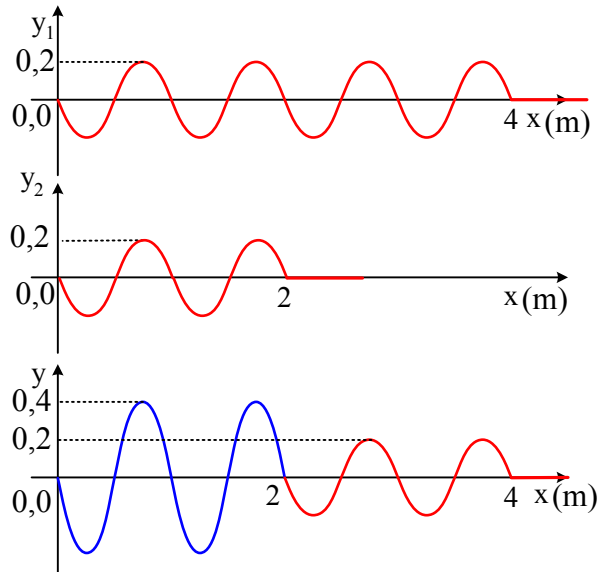


Σχόλια:

- 1) Η εξίσωση (3) $y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 1)$ είναι εξίσωση ενός τρέχοντος κύματος. Η συμβολή δηλαδή δύο κυμάτων που διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση, είναι ένα νέο τρέχον κύμα. Δείτε το αυτό σε αντιδιαστολή με την περίπτωση που τα δύο κύματα διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις, οπότε προκύπτει στάσιμο κύμα.
- 2) Θα μπορούσε να δοθεί και μια δεύτερη «πρακτική» λύση στην παρουσίαση των στιγμιοτύπων. Ας την δούμε:

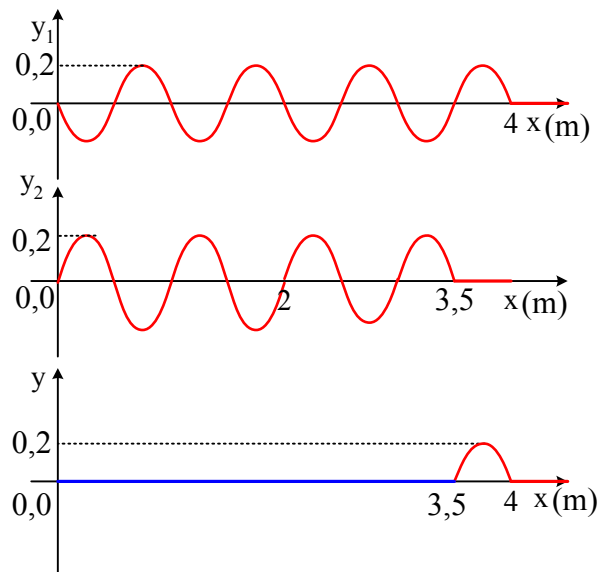
Με βάση την αρχή της επαλληλίας, το κάθε κύμα διαδίδεται ανεξάρτητα του άλλου και επειδή οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται προς την θετική κατεύθυνση, κάθε σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα, αρχίζει επίσης να ταλαντώνεται προς τα πάνω και έτσι δημιουργείται «όρος». Το πρώτο τη στιγμή t_2 έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $x=vt=4m$, ενώ το μήκος κύματος είναι $2m$. Αντίστοιχα το δεύτερο κύμα έχει διαδο-

θεί μέχρι τη θέση $x_2=v(t-1s)=2m$. Έτσι σχεδιάζουμε τα δύο ανεξάρτητα κύματα και με πρόσθεση των αντίστοιχων απομακρύνσεων παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα, όπως φαίνεται στο σχήμα:



όπου με μπλε χρώμα έχει σχεδιαστεί το τμήμα, στο οποίο έχει συμβεί συμβολή.

Η αντίστοιχη κατάσταση για το iii) ερώτημα είναι:



Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια
Διονύσης Μάργαρης