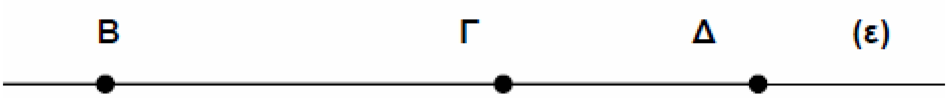
Ταλαντώσεις - κύματα - στιγμιότυπο

Κατά μήκος ελαστικής χορδής (ε) διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Έστω τρία σημεία Β, Γ, Δ της χορδής. Όταν η χορδή είναι ακόμη ευθεία, η απόσταση μεταξύ των Β και Δ είναι (ΒΔ) = 3 m.



Μετά τη διάδοση του κύματος πάνω στη χορδή, υλικό σημείο στο Β προηγείται κατά δυο ταλαντώσεις υλικού σημείου που βρίσκεται στο Γ και κατά τρεις ταλαντώσεις υλικού σημείου που βρίσκεται στο Δ.

Η ταλάντωση στο Γ περιγράφεται από την εξίσωση $y_Γ = 0{,}2ημωt$ στο SI.

Δίνεται ακόμη ότι καθένα από τα σημεία της χορδής που ταλαντώνονται, βρίσκεται 10 φορές ανά δευτερόλεπτο σε όρος.

i) Ποια είναι η φορά διάδοσης του κύματος και γιατί ;

ii) Να βρεθούν οι εξισώσεις απομάκρυνσης χρόνου για τα σημεία Β και Δ.

iii) Να βρεθεί σε πόσο χρόνο διανύει το κύμα την απόσταση ΒΔ.

iv) Κάποια χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο στο Β έχει εκτελέσει 10 ταλαντώσεις. Πόσο απέχει από τη θέση του Γ στην ευθεία διάδοσης του κύματος, η θέση υλικού σημείου Ζ, το οποίο έχει εκτελέσει μέχρι την ίδια χρονική στιγμή 24 ταλαντώσεις.

v) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος από το σημείο Β μέχρι το σημείο Δ κάποια χρονική στιγμή που το Β βρίσκεται σε κοιλάδα.

Απάντηση

i) Αν N_B, $N_Γ$, $N_Δ$ το πλήθος των ταλαντώσεων στα σημεία Β,Γ, Δ κάποια χρονική στιγμή μετά τη διάδοση του κύματος , για τις φάσεις των ταλαντώσεων στα σημεία αυτά ισχύει ότι

$$φ_B = 2πN_B\ ,\ φ_Γ = 2πN_Γ\ ,\ φ_Δ = 2πN_Δ.$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε :

α. $N_B = N_Γ + 2$ ή $2πN_B = 2πN_Γ + 4π$ ή $φ_B = φ_Γ + 4π$ (1) και

β. $N_B = N_Δ + 3$ ή $2πN_B = 2πN_Δ + 6π$ ή $φ_B = φ_Δ + 6π$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει $φ_Γ + 4π = φ_Δ + 6π$ ή $φ_Δ = φ_Γ - 2π$ (3)

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι $φ_B > φ_Γ > φ_Δ$ κατά συνέπεια το κύμα διαδίδεται από το σημείο Β προς το σημείο Δ.

ii) Το κάθε σημείο του μέσου διάδοσης μετά που θα τεθεί σε ταλάντωση, βρίσκεται μια φορά ανά περίοδο σε όρος (θέση πλάτους +Α) και αφού, στο συγκεκριμένο κύμα τα εν λόγω σημεία βρίσκονται 10 φορές /s σε όρος , συμπεραίνουμε ότι πραγματοποιούνται 10 ταλαντώσεις/s ή f = 10Hz .

$$\text{Αλλά}\ \ ω = 2πf = 2π\cdot 10\ \text{Hz ή}\ ω = 20π\ \text{rad/s.}\ (4)$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης – χρόνου στο σημείο Γ δίνεται $y_Γ = 0{,}2ημωt$ και με βάση την (4) γράφεται

$$y_Γ = 0{,}2ημ20πt\ (SI)\ \ (5)\ \ \text{άρα}\ \ φ_Γ = 20πt\ \ SI\ (6).$$

Οι (1) , (2) με βάση την (6) γράφονται $φ_B = 20πt + 4π$ στο SI (7) και $φ_Δ = 20πt – 2π$ SI (8)

Αλλά $y_B = Aημφ_B$ και με βάση την (7) $y_B = 0{,}2ημ(20πt+4π)$ στο SI (9)

Όμοια $y_\Delta = A\eta\mu\varphi_\Delta$ και με βάση την (8) $y_\Delta = 0{,}2\eta\mu(20\pi t - 2\pi)$ στο SI (10)

iii) Το σημείο Β προηγείται κατά 3 ταλαντώσεις του σημείου Δ , άρα το σημείο Δ τέθηκε σε ταλάντωση μετά από χρόνο 3Τ αφότου άρχισε να ταλαντώνεται το σημείο Β.

Επομένως η απόσταση ΒΔ διανύεται από το κύμα σε χρόνο

$$\Delta t_{B\Delta} = 3T = 3\cdot 2\pi/\omega \text{ και με βάση την (4) } \Delta t_{B\Delta} = 0{,}3 \text{ s.}$$

iv) Είναι $N_B = N_\Gamma + 2$ ή $10 = N_\Gamma + 2$ ή $N_\Gamma = 8$ ταλαντώσεις και επειδή $N_Z = 24$ ταλαντώσεις είναι $N_Z = N_\Gamma + 16$, άρα το σημείο Ζ τέθηκε σε ταλάντωση αφού το Γ είχε κάνει 16 πλήρεις ταλαντώσεις δηλαδή μετά από χρόνο 16Τ άρα (ΓΖ) = 16λ όπου λ το μήκος κύματος.

Αλλά $\upsilon = \dfrac{\lambda}{T}$ ή $\dfrac{(B\Delta)}{\Delta t_{B\Delta}} = \dfrac{\lambda}{T}$ ή $\dfrac{(B\Delta)}{3T} = \dfrac{\lambda}{T}$ ή $\lambda = \dfrac{(B\Delta)}{3}$ =1 m (11) και (ΓΖ) = 16·1 m = 16 m.

v) Από τις (5), (9), (10) προκύπτει ότι κάθε χρονική στιγμή είναι: $y_B = y_\Gamma = y_\Delta$ και επειδή θέλουμε το σημείο Β να βρίσκεται σε κοιλάδα, θα βρίσκονται σε κοιλάδα και τα σημεία Γ, Δ την ίδια χρονική στιγμή.

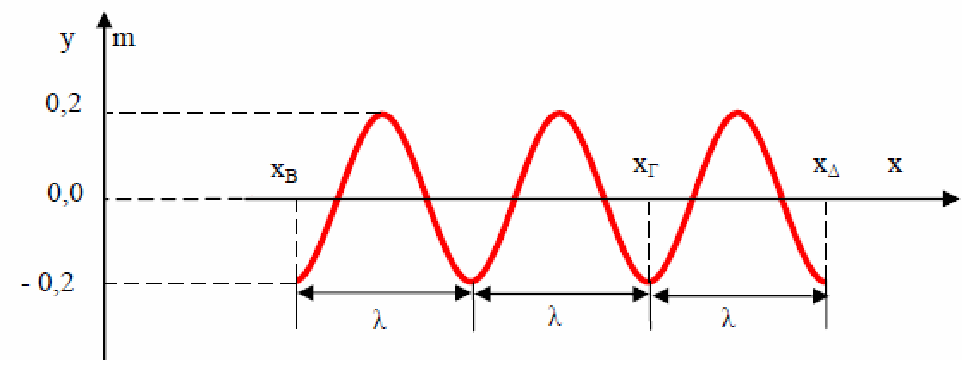
Εξ άλλου :

α. από την (11) προκύπτει ότι (ΒΔ) = 3λ

β. επειδή σε διαφορά φάσης 2π αντιστοιχεί Δχ = λ πάνω στην ευθεία διάδοσης, θα είναι

$$x_\Gamma = x_B + 2\lambda \text{ και } x_\Delta = x_B + 3\lambda.$$

Με βάση όλα αυτά, το ζητούμενο στιγμιότυπο φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης