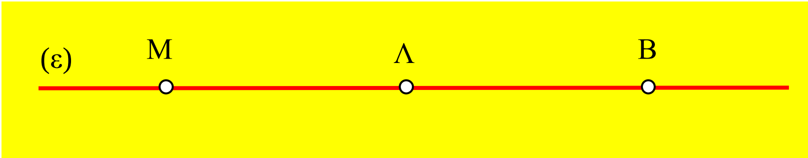
Φορά διάδοσης κύματος, ταλαντώσεις και αποστάσεις υλικών σημείων

Κατά μήκος ευθύγραμμης ελαστικής χορδής (ε), διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα διάδοσης υ = 8 m/s.



Έστω τρία σημεία Μ, Λ, Β της χορδής.

Κάποια χρονική στιγμή μετά την διάδοση του κύματος, το υλικό σημείο στο Λ έχει εκτελέσει $N_Λ$ = N πλήρεις ταλαντώσεις ,το υλικό σημείο στο Μ έχει εκτελέσει N_M = $(N+N_1)$ πλήρεις ταλαντώσεις και το υλικό σημείο στο Β έχει εκτελέσει N_B= $(N-N_1)$ πλήρεις ταλαντώσεις , όπου Ν και N_1 ακέραιοι θετικοί αριθμοί. Ανάμεσα στο Μ και το Β υπάρχουν μετά τη διάδοση του κύματος , εννέα ακόμη υλικά σημεία , που έχουν κάθε χρονική στιγμή ίσες απομακρύνσεις και ίσες ταχύτητες με το υλικό σημείο που ταλαντώνεται στο Β.

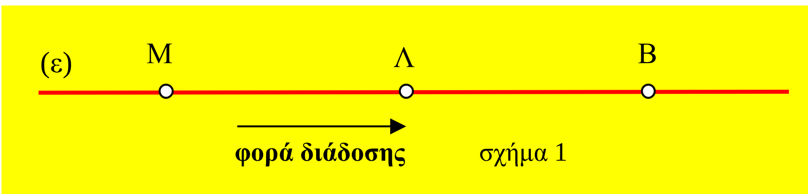
Αν η εξίσωση απομάκρυνσης χρόνου στο σημείο Β είναι y_B = 0,4ημ20πt σε μονάδες SI :

1. Να βρείτε τη φορά διάδοσης του κύματος.
2. Να αποδείξετε ότι τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται στα σημεία Μ και Β έχουν κάθε χρονική στιγμή ίσες απομακρύνσεις και ίσες ταχύτητες.
3. Να βρείτε πόσο απέχει από το Β στην ευθεία (ε) το κοντινότερό του σημείο προς την μεριά το Λ, το οποίο έχει κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με το Β.
4. Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των σημείων Μ και Β της ευθείας (ε)
5. Να βρείτε την τιμή του N_1.
6. Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης χρόνου για την ταλάντωση υλικού σημείου Γ που ξεκινά να ταλαντώνεται 0,15 s πριν αρχίσει η ταλάντωση στο Μ.

Απάντηση

1. Τα σημεία που πρωτοφτάνει το κύμα, έχουν κάμει ύστερα από χρόνο Δt περισσότερες ταλαντώσεις από τα σημεία που έχουν τεθεί σε κίνηση αργότερα.

Έτσι επειδή $N_M > N_Λ > N_B$, **το κύμα διαδίδεται από το Μ προς το Β** όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



σχήμα 1

2. Για τις φάσεις $φ_M$, $φ_B$ των ταλαντώσεων στα σημεία Μ και Β την ίδια χρονική στιγμή ισχύουν

$φ_M = (N+N_1)2π$ και $φ_B = (N-N_1)2π$ οπότε

$φ_M – φ_B = N2π+N_12π – N2π + N_12π$ ή $φ_M – φ_B = 2N_1 \cdot 2π = 2κπ$ (1) με $κ = 2N_1$ (2)

άρα $\varphi_M = 2\kappa\pi + \varphi_B$ (3)

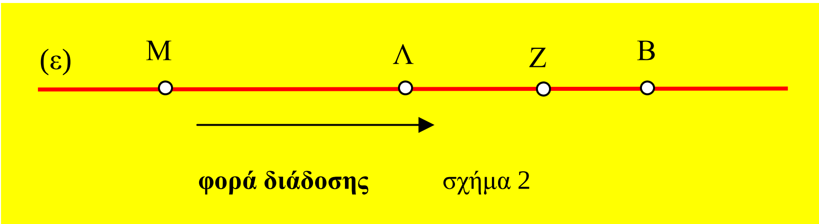
Από την (3) προκύπτουν

$$\left.\begin{array}{c} A\eta\mu\varphi_M = A\eta\mu(2\kappa\pi+\varphi_B) \\ \kappa\alpha\iota \\ A\omega\sigma\upsilon\nu\varphi_M = A\omega\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi+\varphi_B) \end{array}\right\} \text{ ή } \left.\begin{array}{c} A\eta\mu\varphi_M = A\eta\mu(\varphi_B) \\ \kappa\alpha\iota \\ A\omega\sigma\upsilon\nu\varphi_M = A\omega\sigma\upsilon\nu(\varphi_B) \end{array}\right\} \text{ άρα } \left.\begin{array}{c} y_M = y_B \\ \kappa\alpha\iota \\ \upsilon_M = \upsilon_B \end{array}\right\}$$

Επομένως στα σημεία Μ και Β οι ταλαντώσεις έχουν κάθε χρονική στιγμή **την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα.**

3. Η στιγμιαία απομάκρυνση στο Β μας δίνεται στη μορφή $y_B = A\eta\mu\omega t$ (4)

Έστω σημείο Ζ αριστερά του Β προς την μεριά του Λ όπως στο σχήμα 2.



σχήμα 2

Επειδή το κύμα διαδίδεται από το Μ προς το Β , το Ζ αρχίζει να ταλαντώνεται νωρίτερα από το Β και ισχύει

$$y_Z = A\eta\mu\omega(t+\Delta t_{ZB}) \quad \text{με } \Delta t_{ZB} = ZB/\upsilon \quad \text{άρα } y_Z = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{ZB}{\lambda}\right) \quad (5)$$

Η σχέση (3) ισχύει προφανώς για κάθε ζεύγος σημείων του κύματος με την ίδια ιδιότητα άρα

$$\varphi_Z = 2\kappa\pi + \varphi_B \quad \text{και με βάση τις (4) , (5)}$$

$$\frac{2\pi t}{T}+\frac{2\pi(ZB)}{\lambda}-\frac{2\pi t}{T} = 2\kappa\pi \quad \text{ή} \quad ZB = \kappa\lambda \quad \text{άρα} \quad ZB_{min} = \lambda$$

Από την εξίσωση $y_B = 0{,}4\eta\mu 20\pi t$ που μας δόθηκε προκύπτει ότι $\omega = 20\pi$ rad/s όμως $\omega = 2\pi f$ άρα $f = 10$ Hz . Εξ' άλλου $\upsilon = \lambda f$ οπότε $\lambda = 0{,}8$ m και

$$\mathbf{ZB_{min} = 0{,}8\ m}$$

4. Όπως το σημείο Β απέχει από το αμέσως προηγούμενό του σημείο Ζ που έχει την ίδια ιδιότητα , απόσταση λ έτσι και το πλησιέστερο σημείο στο Ζ θα απέχει απ' αυτό κατά λ κλπ

Προκύπτει έτσι το συμπέρασμα ότι,

η απόσταση ανάμεσα σε δυο διαδοχικά σημεία που έχουν κάθε χρονική στιγμή ίσες απομακρύνσεις και ίσες ταχύτητες είναι ίση με λ.

Αφού όμως, ανάμεσα στο Β και το Μ υπάρχουν εννέα ακόμη σημεία με ίσες στιγμιαίες απομακρύνσεις και ίσες ταχύτητες με το υλικό σημείο που βρίσκεται στο Β , το Μ θα είναι το δέκατο σημείο μετά το Β.

Άρα $MB = 10\lambda$ ή

$$\mathbf{MB = 8\ m}$$

5. Επειδή το κύμα διαδίδεται από το Μ προς το Β με $y_B = A\eta\mu\omega t$, ισχύει

$$y_M = A\eta\mu\omega(t+\Delta t_{MB}) \quad \text{με } \Delta t_{MB} = MB/\upsilon \quad \text{άρα } y_M = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{MB}{\lambda}\right)$$

άρα

$$\varphi_M - \varphi_B = \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi(MB)}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T} \quad ή \quad \varphi_M - \varphi_B = \frac{2\pi(MB)}{\lambda}$$

Επειδή ΜΒ = 10λ θα είναι $\varphi_M - \varphi_B = 10 \cdot 2\pi$ rad

Είδαμε όμως στο δεύτερο ερώτημα ότι $\varphi_M - \varphi_B = 2N_1 \cdot 2\pi$ άρα $2N_1 \cdot 2\pi = 10 \cdot 2\pi$

ή $\mathbf{N_1 = 5}$

6. Το σημείο Μ προηγείται από το Β κατά $2N_1 = 10$ ταλαντώσεις ή σε φάση κατά $N_1 \cdot 2\pi$ rad ή κατά 20π rad

Όμως $y_B = 0{,}4ημ20\pi t$ άρα $y_M = 0{,}4ημ(20\pi t + 20\pi)$ SI (8)

Το υλικό σημείο στο Γ θα έχει εξίσωση απομάκρυνσης

Άρα $y_Γ = 0{,}4ημ\varphi_Γ$ ή $y_Γ = 0{,}4ημ(\varphi_M + \Delta\varphi_{ΓΜ})$ (9)

όπου $\Delta\varphi_{ΓΜ}$ η φάση που απέκτησε η ταλάντωση στο Γ μέχρι να φτάσει το κύμα στο Μ.

Αλλά $\Delta\varphi_{ΓΜ} = \omega\Delta t_{ΓΜ} = 20\pi \cdot 0{,}15$ rad $= 3\pi$ rad (10)

Από τις (8) , (9) και (10) προκύπτει τελικά ότι

$$\mathbf{y_Γ = 0{,}4ημ(20\pi t + 23\pi)\ SI}$$

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης