

Τρέχον κύμα σε γραμμικό ελαστικό μέσο

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου με ταχύτητα $u=100\text{cm/s}$. Θεωρούμε ότι το μέσο ταυτίζεται με το άξονα x' και ότι το κύμα διαδίδεται κατά τη θετική φορά. Τη στιγμή $t=0$, το σημείο O , που βρίσκεται στη θέση $x=0$, αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση

$$y=2\eta\mu 10\pi t \quad (\text{το } y \text{ σε cm, το } t \text{ σε s}).$$

Ένα σημείο M του μέσου βρίσκεται στη θέση $x_M=80\text{cm}$ από το O .

- i) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του M από τη θέση ισορροπίας του και να υπολογίσετε την τιμή της τη στιγμή $t_1=35/40\text{s}$.
- ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης του σημείου M συναρτήσει του χρόνου.
- iii) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή t_2 το σημείο M θα βρίσκεται για πρώτη φορά στη θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσής του.
- iv) Να βρείτε για τη στιγμή t_2 ποια σημεία του μέσου που βρίσκονται στο θετικό ημιάξονα θα έχουν απομάκρυνση $y=+1\text{cm}$ από τη θέση ισορροπίας τους με θετική ταχύτητα.
- v) Να κάνετε το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή t_2 για τα σημεία του θετικού ημιάξονα.

Απάντηση:

- i) Η εξίσωση απομάκρυνσης του M θα είναι

$$y_M = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_M \\ A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right), & t_M \leq t \end{cases}$$

όπου $A=2\text{cm}$,

$\omega=10\pi\text{/s}$, οπότε $f=\omega/2\pi=5\text{Hz}$ και $T=0,2\text{s}$

$\lambda=u/f=20\text{cm}$

και t_M η χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στο M , και η οποία υπολογίζεται από τη σχέση $OM=x_M=u \cdot t_M \Rightarrow t_M=0,8\text{s}$.

Έτσι:

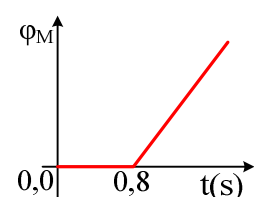
$$y_M = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 0,8\text{s} \\ 2\eta\mu 2\pi(5t - 4), & 0,8\text{s} \leq t \end{cases} \quad \text{όπου } y \text{ σε cm και } t \text{ σε s}$$

Επειδή είναι $t_1=35/40\text{s}=0,875\text{s}>0,8\text{s}$ η απομάκρυνση του M θα υπολογιστεί με αντικατάσταση στον δεύτερο κλάδο, δηλαδή

$$y_M = 2\eta\mu 2\pi\left(5 \cdot \frac{35}{40} - 4\right) = 2\eta\mu \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\text{cm}$$

- ii) Η σχέση που συνδέει τη φάση του M με το χρόνο, της οποίας τη γραφική παράσταση ζητάμε, είναι

$$\varphi_M = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 0,8\text{s} \\ 2\pi(5t - 4), & 0,8\text{s} \leq t \end{cases}$$



και η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι

iii) Από τη στιγμή που κύμα φτάνει στο Μ και αυτό αρχίζει να κινείται, θα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση, οπότε για πρώτη φορά θα βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνσή του μετά από χρόνο $T/4$ από τη στιγμή που ξεκίνησε την ταλάντωσή του. Έτσι $t_2 = t_M + T/4 = 0,8 + 0,2/4 = 0,85s$.

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την στιγμή t_2 και από την εξίσωση της απομάκρυνσης του Μ θέτοντας στον δεύτερο κλάδο όπου $y_M = +A$. Έτσι θα είχαμε

$$\begin{aligned} +A &= A\eta\mu 2\pi(5t-4) \Rightarrow \eta\mu 2\pi(5t-4) = 1 \Rightarrow 2\pi(5t-4) = 2\kappa\pi + \pi/2 \Rightarrow \\ t &= 0,2\kappa + 0,85 \text{ με } t \geq 0,8s, \\ \text{απ' όπου } 0,2\kappa + 0,85 &\geq 0,8 \Rightarrow \\ \kappa &\geq -0,25 \Rightarrow \kappa = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

οπότε για πρώτη φορά $\kappa = 0$ και $t_2 = 0,85s$.

iv) Τα ζητούμενα σημεία που για τη στιγμή t_2 έχουν $y = +1\text{cm}$ και $v > 0$, θα τα αναζητήσουμε μεταξύ των σημείων που την t_2 έχουν ήδη ξεκινήσει ταλάντωση, οπότε το πρώτο πράγμα που πρέπει να ελέγξουμε είναι μέχρι ποια θέση έχει φτάσει το κύμα τη στιγμή t_2 .

$$x = u \cdot t_2 \Rightarrow x = 85\text{cm}.$$

Άρα τα ζητούμε σημεία θα ανήκουν στο διάστημα $0 \leq x \leq 85\text{cm}$.

Για τα ζητούμενα σημεία ισχύει

$$\begin{aligned} y = +1 &\Rightarrow 2\eta\mu 2\pi(5t_2 - \frac{x}{20}) = 1 \Rightarrow \eta\mu 2\pi(4,25 - \frac{x}{20}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ 2\pi(4,25 - \frac{x}{20}) &= \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, & \text{δεκτή διότι δίνει } v > 0 \\ 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, & \text{απορριπτεται διότι δίνει } v < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα

$$8,5 - 0,1x = 2\kappa + \frac{1}{6} \Rightarrow x = 85 - 20\kappa - \frac{10}{6} \Rightarrow x = \frac{250}{3} - 20\kappa$$

και

$$0 \leq x \leq 85 \Rightarrow 0 \leq \frac{250}{3} - 20\kappa \leq 85 \Rightarrow -\frac{250}{3} \leq -20\kappa \leq \frac{5}{3}$$

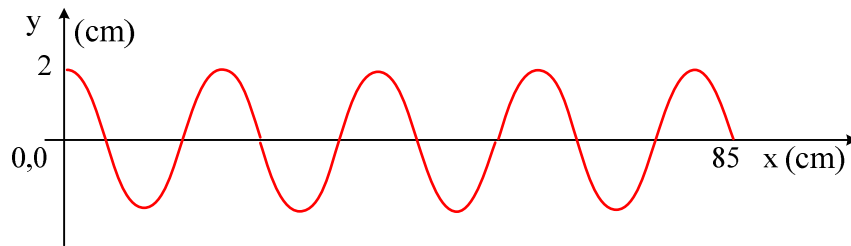
$$-\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{25}{18} \Rightarrow \kappa = 0, 1$$

$$\text{οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι δύο, το } x_1 = \frac{250}{3}\text{cm και το } x_2 = \frac{190}{3}\text{cm}$$

v) Το στιγμιότυπο του κύματος για τα σημεία του θετικού ημιιάξονα τη στιγμή t_2 θα είναι η γραφική παράσταση της σχέσης

$$y = \begin{cases} 2\eta\mu 2\pi(4,25 - \frac{x}{20}), & 0 \leq x \leq 85\text{cm} \\ 0, & x \geq 85\text{cm} \end{cases}$$

η οποία φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα

**Υλικό Φυσικής - Χημείας.**

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Τρις Ιωάννου

Τρις Ιωάννου

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης