Το κύμα, η ταλάντωση και η φάση.

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά κατά μήκος ελαστικού μέσου που εκτείνεται στον άξονα x'ox. Τη χρονική στιγμή t=0 το κύμα βρίσκεται στη θέση Ο ($x_{(O)}=0$) όπου $y_{(O)}=0$ και $V_{(O)} > 0$. Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι $y=0{,}02ημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{λ}\right)$ (S.I). Τη χρονική στιγμή t=1s το σημείο Α του μέσου στη θέση $x_A=\frac{2}{3}m$ απέχει από τη θέση ισορροπίας $\sqrt{3}\,10^{-2}m$ για $4^η$ φορά. Την ίδια χρονική στιγμή το πλησιέστερο προς το Α σημείο του μέσου που έχει την ίδια ταχύτητα (διανυσματικά) με αυτό, βρίσκεται σε θέση που απέχει από το Α κατά τη διεύθυνση του μέσου απόσταση $d=\frac{4}{3}m$. Να υπολογίσετε :

i) Την περίοδο του κύματος.
ii) Το μήκος κύματος του κύματος.
iii) Τη ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

Απάντηση:

<u>$1^{ος}$ τρόπος</u>

Η απομάκρυνση y_A του σημείου Α από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t=1s μπορεί να είναι : $y_A=\pm\sqrt{3}\,10^{-2}m$. Από την εξίσωση του κύματος στη θέση Α ($x_A=+\frac{2}{3}m$) έχουμε:

$$\pm\sqrt{3}\,10^{-2}m = 2\,10^{-2}ημ2π\left(\frac{1}{T}-\frac{2}{3λ}\right) \Rightarrow ημ2π\left(\frac{1}{T}-\frac{2}{3λ}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

Η οποιαδήποτε προσπάθεια επίλυσης της προηγούμενης "διπλής" τριγωνομετρικής εξίσωσης οδηγεί σε μία σχέση με δύο αγνώστους, τα Τ και λ.

Η δεύτερη σχέση που χρειαζόμαστε θα μπορούσε να προκύψει από τη διαφορά φάσης των δύο πλησιέστερων σημείων που έχουν την ίδια ταχύτητα (διανυσματικά) και απέχουν $\sqrt{3}\,10^{-2}m$ από τις θέσεις ισορροπίας τους: $Δφ=\frac{2πd}{λ} \overset{d=\frac{4}{3}m}{\Rightarrow} Δφ = \frac{8π}{3λ}rad$. Απαιτείται όμως ο υπολογισμός των φάσεων αυτών των δύο σημείων τη χρονική στιγμή t=1s που πάλι είναι σε συνάρτηση με τους αγνώστους λ και Τ. Άρα;

Επιστροφή στα "θεμελιώδη". Δηλαδή στις πληροφορίες που δίνει η εκφώνηση για την αρμονική ταλάντωση του σημείου Α. "Κρύβω" τους αγνώστους λ και Τ στην (1) θέτοντας για τη φάση του Α:

$$φ_A= 2π\left(\frac{1}{T}-\frac{2}{3λ}\right) \text{ (S.I).} \quad (2)$$

Από την $(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $ημφ_A = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} φ_A = κπ + \frac{π}{3} & (3) \\ φ_A = κπ - \frac{π}{3} & (4) \qquad κ = 0,1,2... \end{cases}$

$$\text{Από (3) } κ=0: \quad φ_{A_1} = \frac{π}{3}\text{rad} \qquad (1^{η} \text{ φορά})$$

$$κ=1: \quad φ_{A_3} = \frac{4π}{3}\text{rad} \qquad (3^{η} \text{ φορά})$$

$$κ=2: \quad φ_{A_5} = \frac{7π}{3}\text{rad} \qquad (5^{η} \text{ φορά}) \qquad (5)$$

Από (4) $κ=0$: $φ_A < 0$ απορρίπτεται διότι αντιστοιχεί σε θέση όπου το κύμα δεν έχει φθάσει.

$$κ=1: \quad φ_{A_2} = \frac{2π}{3}\text{rad} \qquad (2^{η} \text{ φορά})$$

$$κ=2: \quad φ_{A_4} = \frac{5π}{3}\text{rad} \qquad (4^{η} \text{ φορά}) \qquad (6)$$

Η φάση $φ_{A_4} = \frac{5π}{3}$rad που αντιστοιχεί στην τέταρτη φορά δίνει: $V_{A_4} = ωΑσυνφ_{A_4} = ωΑσυν\frac{5π}{3} > 0$

Οι πλησιέστερες τιμές φάσης απομάκρυνσης προς την τιμή $φ_{A_4} = \frac{5π}{3}$rad που είναι $φ_{A_3} = \frac{4π}{3}$rad και $φ_{A_5} = \frac{7π}{3}$rad "αντιστοιχούν" και στις φάσεις των πλησιέστερων προς το σημείο Α σημείων, που απέχουν $\sqrt{3}10^{-2}$m από τη θέση ισορροπίας τους.

Όμως $V_{A_3} = ωΑσυνφ_{A_3} = ωΑσυν\frac{4A}{3} < 0$ άρα απορρίπτεται ως πλησιέστερο στο A_4.

$V_{A_5} = ωΑσυνφ_{A_5} = ωΑσυν\frac{7π}{3} = ωΑσυν\left(2π + \frac{π}{3}\right) = ωΑσυν\frac{π}{3} > 0$. Συνεπώς το σημείο A_5 είναι το πλησιέστερο σημείο προς το A_4 (δηλαδή στο Α) που έχει την ίδια ταχύτητα (διανυσματικά) με αυτό.

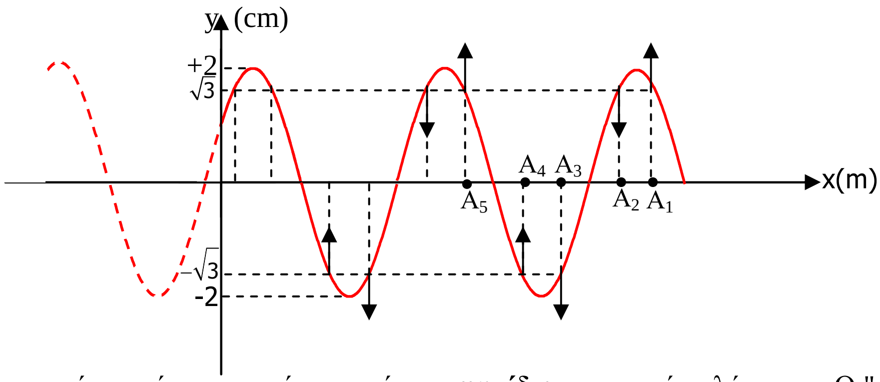
$$\text{Άρα } Δφ_{A_4A_5} = \frac{2π}{3} \Rightarrow 2π\frac{d}{λ} = \frac{2π}{3} \Rightarrow λ = 3d \Rightarrow λ = 4\text{m}.$$

$$\text{Από (2)} \Rightarrow \frac{5π}{3} = 2π\left(\frac{1}{T} - \frac{2}{3\cdot 4}\right) \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{2}{T} - \frac{1}{3} \Rightarrow T = 1\text{s}.$$

$$υ = \frac{λ}{T} = \frac{4}{1} = 4\text{m/s}.$$

2ος τρόπος

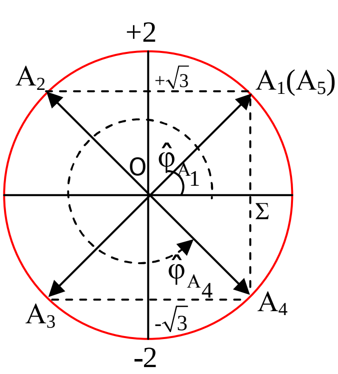
Έστω ένα τυχαίο στιγμιότυπο του κύματος όπως αυτό του σχήματος, στο οποίο τα μαύρα βέλη είναι τα διανύσματα των ταχυτήτων των αντιστοίχων σημείων του μέσου.



Το κύμα μεταφέρει από σημείο σε σημείο του μέσου **την ίδια** αρμονική ταλάντωση. Ο "κάθε ταλαντωτής" αρχίζει να ταλαντώνεται προς τη θετική κατεύθυνση και **σε κάθε περίοδο Τ** απέχει για 1η φορά $\sqrt{3}\,10^{-2}$m από τη θέση ισορροπίας του όταν y=+$\sqrt{3}\,10^{-2}$m και V > 0, για 2η φορά όταν y= +$\sqrt{3}\,10^{2}$m και V < 0, για 3η φορά όταν y=-$\sqrt{3}\,10^{-2}$m και V < 0 και για 4η φορά όταν y=-$\sqrt{3}\,10^{-2}$m και V > 0, δηλαδή 4 φορές σε κάθε περίοδο. Ένας ταλαντωτής που απέχει για 4η φορά $\sqrt{3}\,10^{-2}$m από τη θέση ισορροπίας του είναι και ο A_4 του στιγμιότυπου, ο οποίος θα μπορούσε να αντιστοιχεί στο σημείο Α της εκφώνησης. Ο πλησιέστερος προς αυτόν με την ίδια ταχύτητα (διανυσματικά) είναι ο A_5. Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι η απόσταση A_5A_4 είναι μικρότερη από $\frac{\lambda}{2}$.

$$\text{Άρα } (A_5A_4) < \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2\pi\left(A_5A_4\right) < 2\pi\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2\pi\frac{\left(A_5A_4\right)}{\lambda} < \pi \Rightarrow \Delta\varphi_{A_5A_4} < \pi. \quad (7).$$

Οι τέσσερις διαφορετικές εκδοχές που ικανοποιούν την απαίτηση ένας ταλαντωτής να απέχει d=$\sqrt{3}\,10^{-2}$m από τη θέση ισορροπίας του, αντιστοιχούν και σε τέσσερα διαδοχικά "σημεία – ταλαντωτές" του μέσου (A_1,A_2,A_3,A_4) που απέχουν d=$\sqrt{3}\,10^{-2}$m από τη θέση ισορροπίας τους και βρίσκονται σε τμήμα μήκους λ του μέσου, που με τη σειρά του αντιστοιχεί σε χρόνο ταλάντωσης μιας περιόδου Τ. Με τη βοήθεια του κύκλου αναφοράς (ή του περιστρεφόμενου διανύσματος) έχουμε:



$$\Delta\hat{\varphi}_{A_4A_5} = 2\hat{\varphi}_{A_1}.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A_1\overset{\Delta}{\Sigma}O$: $\eta\mu\,\hat{\varphi}_{A_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{\varphi}_{A_1} = \frac{\pi}{3}$. Άρα

$\Delta\hat{\varphi}_{A_4A_5} = \frac{2\pi}{3}$ rad. Η τιμή αυτή επαληθεύει την συνθήκη (7).

$$\text{Αλλά } \Delta\hat{\varphi}_{A_4A_5} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{2\pi}{3} \xRightarrow{d=\frac{4}{3}m} \lambda=4m. \quad (8)$$

Όταν το σημείο Α απέχει $d=\sqrt{3}10^{-2}m$ από τη θέση ισορροπίας του για 4η φορά, τότε $y_A=-\sqrt{3}10^{-2}m$

Από την εξίσωση του κύματος για τη θέση $A(x_A=\frac{2}{3}m)$ έχουμε:

$$-\sqrt{3}10^{-2}=2 10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{1}{T}-\frac{2}{3\lambda}\right) \overset{(8)}{\Rightarrow} \eta\mu 2\pi\left(\frac{1}{T}-\frac{2}{3\cdot 4}\right) = \eta\mu\hat{\varphi}_{A_4} \Rightarrow 2\pi\left(\frac{1}{T}-\frac{2}{3\cdot 4}\right) = \hat{\varphi}_{A_4}. \quad (9)$$

Από τον κύκλο αναφοράς προκύπτει ότι $\hat{\varphi}_{A_4}=2\pi-\hat{\varphi}_{A_1} \Rightarrow \hat{\varphi}_{A_4}=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \hat{\varphi}_{A_4}=\frac{5\pi}{3}$ (10)

Από (9) και (10) : $2\pi\left(\frac{1}{T}-\frac{2}{3\cdot 4}\right)=\frac{5\pi}{3} \Rightarrow T=1s$ και $\upsilon=\frac{\lambda}{T}=4m/s.$

ΣΧΟΛΙΑ

i) Ο 1ος τρόπος λύσης δεν είναι απλά ένα μαθηματικό τέχνασμα, αλλά η υπενθύμιση ότι στην εξίσωση ενός αρμονικού κύματος όπως αυτό που δίνεται στην εκφώνηση ο παράγοντας $2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ εκφράζει φάση απομάκρυνσης ταλάντωσης για κάθε διαφορετική τιμή της παραμέτρου x.

ii) Ο 2ος τρόπος λύσης δεν είναι απλά η χρήση του κύκλου αναφοράς προς αποφυγή επίλυσης τριγωνομετρικής εξίσωσης. Η συσχέτιση του κύκλου αναφοράς με το στιγμιότυπο του κύματος δείχνει ότι "αυτό που κάνει ένα σημείο του μέσου σε χρόνο μιας περιόδου T το κάνουν τέσσερα διαφορετικά σημεία του μέσου που βρίσκονται σε μήκος μέσου λ σε τέσσερις διαφορετικές χρονικές στιγμές".

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ξ. Στεργιάδης