Στιγμιότυπο κύματος και αρχική φάση 2.

Από ύψος h=0,8m πάνω από την επιφάνεια του νερού μιας δεξαμενής που ηρεμεί αφήνουμε σφαιρίδια πολύ μικρών διαστάσεων με τέτοιο ρυθμό ώστε, όταν το πρώτο από αυτά φτάνει στην επιφάνεια του νερού να αφήνεται το ένατο. Υποθέτουμε ότι το σημείο πρόσκρουσης (Ο) των σφαιριδίων με την επιφάνεια του νερού εκτελεί αρμονική ταλάντωση αρχίζοντας να ταλαντώνεται προς την αρνητική κατεύθυνση ($V_{(O)}<0$) με αποτέλεσμα να γίνεται πηγή παραγωγής εγκάρσιου αρμονικού κύματος στο οποίο η απόσταση ενός "όρους" από την μεθεπόμενη σε σχέση με αυτό "κοιλάδα" είναι d=0,15m. Το πλάτος του κύματος το οποίο θεωρούμε ότι διαδίδεται χωρίς απώλειες ενέργειας είναι $A=2\cdot 10^{-2}\,m$.

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

β. Θεωρούμε ως t=0 την χρονική στιγμή που αφήνεται η πρώτη η σφαίρα και ως $x_{(O)}=0$ στη θέση (Ο) στην οποία προσκρούουν τα σφαιρίδια στο νερό, να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί η θέση (Ο) σε συνάρτηση με το χρόνο, $y_{(O)}=f(t)$ καθώς και την εξίσωση του αρμονικού κύματος y=f(x,t) για τα σημεία που βρίσκονται στην ευθεία x'Ox και δεξιά της θέσης (Ο) (x>0).

γ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος όταν :

γ₁. αφήνεται το πρώτο σφαιρίδιο.

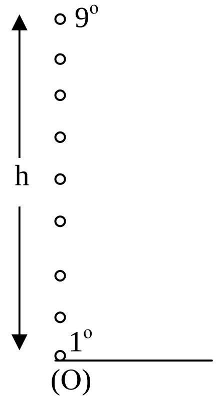
γ₂. το πρώτο σφαιρίδιο φτάνει στην επιφάνεια του νερού.

γ₃. το πέμπτο κατά σειρά σφαιρίδιο φτάνει στην επιφάνεια του νερού.

Δίνεται $g=10m/s^2$, η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση:

α. Το κάθε σφαιρίδιο εκτελεί ελεύθερη πτώση και ο χρόνος κίνησης του μέχρι να φτάσει στην επιφάνεια του νερού είναι: $h=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t=0,4s \qquad (1)$



Επειδή το 9° σφαιρίδιο αφήνεται τη στιγμή που το πρώτο φτάνει στην επιφάνεια του νερού, ο ρυθμός πτώσης σφαιριδίων άρα και προκαλούμενων διαταραχών στην θέση (Ο) είναι : $f=\frac{N}{t} \overset{(1)}{\Rightarrow} f=\frac{8}{0,4}=20Hz \qquad (2)$.

Αυτή είναι η συχνότητα της αρμονικής ταλάντωσης του σημείου στην θέση (Ο), άρα και του παραγόμενου από αυτό αρμονικού κύματος. Η απόσταση d ενός "όρους" από την μεθεπόμενη σε σχέση με αυτό "κοιλάδα" είναι $d=\frac{3\lambda}{2} \Rightarrow \lambda=\frac{2d}{3} \Rightarrow \lambda=0,1m \qquad (3)$.

Η ταχύτητα διάδοσης υ του αρμονικού κύματος είναι: $\upsilon=\lambda f \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} \upsilon=2m/s \qquad (4)$.

β. Το σημείο στη θέση (Ο) αρχίζει να ταλαντώνεται στη χρονική στιγμή $t_1=0,4s$ που το 1° σφαιρίδιο φτάνει στην επιφάνεια του νερού. Οι αρχικές συνθήκες της ταλάντωσης του είναι $y_{(O)}=0$ και $V_{(O)}<0$. Ο χρόνος ταλάντωσης του σημείου στη θέση (Ο) κάποια χρονική στιγμή t ($t>t_1$) είναι $\Delta t=t-t_1$ και η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου (Ο) γράφεται: $y_{(O)}=A\eta\mu[\omega(t-t_1)+\varphi_0]$ με $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$. Για t=0,4s προκύπτει: $0=A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0=0 \Rightarrow \varphi_0=0$ ή $\varphi_0=\pi$ rad. Επειδή για t=0 ισχύει $V_{(O)}<0$, επιλέγουμε $\varphi_0=\pi$ rad. Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου (Ο) είναι

$$y_{(O)}=2\cdot 10^{-2}\,\eta\mu[\omega(t-t_1)+\pi] \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}}$$

$$y_{(O)}=2\cdot 10^{-2}\,\eta\mu[40\pi(t-0,4)+\pi] \text{ (S.I) } (5) \text{ με } t \geq 0,4s.$$

Ας υποθέσουμε ότι ενδίδουμε στον "πειρασμό" να απλοποιήσουμε τη μορφή της (5), τότε η (5) γράφεται

$y_{(O)}=2\cdot 10^{-2}\,A\eta\mu(40\pi t-15\pi)$ (S.I) (5α) με $t \geq 0,4s$.

Παρατηρούμε ότι η (5α) για t=0,4s δίνει $y_{(O)}=2\cdot 10^{-2}\,\eta\mu\pi$, δηλαδή είναι συνεπής ως προς το ότι μας πληροφορεί σωστά για τη φορά ταλάντωσης του σημείου (Ο) αλλά δεν δίνει αρχική φάση μέσα στα όρια $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$. Επιχειρούμε να απλοποιήσουμε περισσότερο την (5α) και έχουμε:

$$y_{(O)}=-2\cdot 10^{-2}\,A\eta\mu(15\pi-40\pi t) \Rightarrow$$

$$y_{(O)}=-2\cdot 10^{-2}\,\eta\mu(14\pi+\pi-40\pi t) \Rightarrow y_{(O)}=-2\cdot 10^{-2}\,\eta\mu(\pi-40\pi t) \Rightarrow$$

$$y_{(O)}=-2\cdot 10^{-2}\,\eta\mu(40\pi t) \Rightarrow$$

$$y_{(O)}=2\cdot 10^{-2}\,\eta\mu(40\pi t+\pi) \text{ (S.I) } (5\beta) \text{ με } t \geq 0,4s.$$

Η (5β) για t=0,4s δίνει : $y_{(O)}=2\cdot 10^{-2}\,\eta\mu(17\pi) \Rightarrow y_{(O)}=2\cdot 10^{-2}\,\eta\mu(16\pi+\pi) \Rightarrow$

$y_{(O)}=2\cdot 10^{-2}\,\eta\mu\pi$, δηλαδή η (5β) με πληροφορεί ότι το σημείο στη θέση (Ο) τη στιγμή t=0,4s κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση και με "παραπληροφορεί" ότι ήδη έχει εκτελέσει 8 πλήρεις ταλαντώσεις που αντιστοιχούν σε μεταβολή της φάσης κατά 16π rad. Αυτό συμβαίνει γιατί η μαθηματική επεξεργασία αλλοίωσε το χρόνο ταλάντωσης από (t-0,4)sσε t s.

Τι γίνετε λοιπόν;

Θα αγνοήσουμε την συνθήκη $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ που είναι ο απλούστερος κοινός κώδικας επικοινωνίας και θα σεβαστούμε την φυσική πραγματικότητα (εξίσωση (5α)) ή θα "πειθαρχήσουμε" στην συνθήκη $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ ακυρώνοντας την φυσική πραγματικότητα (εξίσωση (5β));

Κατά την γνώμη μου "*Και τούτο ποιείν κακείνο μη αφιέναι*". Δηλαδή μένουμε στη θαυμάσια εξίσωση (5) με τον απαραίτητο ορισμό του χρόνου $t \geq 0,4s$ η οποία δηλώνει ότι η ταλάντωση της θέσης (Ο) ($x_{(O)}=0$) αρχίζει τη χρονική στιγμή t_1=0,4s και προς την αρνητική κατεύθυνση, έτσι και συνεπείς προς τη φυσική πραγματικότητα είμαστε και τηρούμε τον κώδικα επικοινωνίας $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$.

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά ($x \geq 0$)για κάποιο σημείο που βρίσκεται δεξιά του σημείου (Ο), με βάση την (5) είναι:

$$y=2\cdot 10^{-2}\,\eta\mu\left[40\pi\left[(t-\frac{x}{\upsilon})-0,4\right]+\pi\right] \overset{(4)}{\Rightarrow} y=2\cdot 10^{-2}\,\eta\mu\left[40\pi(t-\frac{x}{2})-16\pi+\pi\right] \Rightarrow$$

$$y = 2 \cdot 10^{-2} ημ\left[40π(t - \frac{x}{2}) - 15π\right] (S.I) \quad (6) \text{ με } t \geq 0{,}4s.$$

Εύλογα θα ρωτήσει κάποιος "γιατί στην εξίσωση του αρμονικού κύματος (6) αποδεχόμαστε το -15 π rad ως ένα είδος αρχικής φάσης;". Η απάντηση εδώ είναι ότι το -15 π rad έχει προκύψει ως άθροισμα του -16 π rad που έχει να κάνει με το ότι "μας επιβλήθηκε" εξ' υποθέσεως η αρχή των χρόνων t=0 να μην είναι η χρονική στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται η θέση (Ο) και του π που έχει να κάνει με τον τρόπο ταλάντωσης της θέσης (Ο) ($x_{(O)}=0$) για την οποία ισχύει ότι για t=0,4s, $V_{(O)} <0$. Οι πληροφορίες αυτές είναι απαραίτητο να δηλώνονται στην εξίσωση του αρμονικού κύματος, ενώ η εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης του σημείου (Ο) με τη μορφή (5α) η οποία για t=0,4s δίνει τη σωστή τιμή φάσης στη θέση (Ο), $φ_{(O)}= π$ rad αν απομονωθεί από τον περιορισμό t ≥ 0,4s και χωρίς τις άλλες πληροφορίες που δίνει η (5) θα μπορούσε:

α. Να μας "παραπληροφορεί" ότι η ταλάντωση του σημείου (Ο) αρχίζει τη χρονική στιγμή t = 7,5 T =0,375s και προς τη θετική κατεύθυνση ή

β. Να μας πληροφορεί ότι η ταλάντωση του σημείου (Ο) αρχίζει τη χρονική στιγμή t=8T=0,4s προς την αρνητική κατεύθυνση, το οποίο και συμβαίνει.

Η (5β) χωρίς τον περιορισμό t ≥ 0,4s μας "παραπληροφορεί" ότι για t=0,4s η φάση του σημείου (Ο) είναι $φ_{(O)}=16π+π$ rad δηλαδή ότι η θέση (Ο) έχει ήδη εκτελέσει 8 πλήρεις ταλαντώσεις αρχίζοντας να ταλαντώνεται προς την αρνητική φορά.

Επιλέγω λοιπόν να γράφω την εξίσωση της απομάκρυνσης μιας αρμονικής ταλάντωσης με τη μορφή $y=Aημ(ωΔt+φ_0)$ όπου η παράμετρος Δt εκφράζει το χρόνο ταλάντωσης ανεξάρτητα από το πότε ορίστηκε η αρχή των χρόνων (t=0) και η $φ_0$ με πληροφορεί για τις αρχικές συνθήκες της ταλάντωσης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Προφανώς πιο απλό σε φορμαλισμό και κομψό σε φυσικό λογισμό θα ήταν να ορίσουμε ως αρχή τον χρόνο t'=0 τη στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο (Ο) (απλά η εκφώνηση σκόπιμα άλλα "κελεύει") δηλαδή t'=t-4 με $t' \geq 0$. Τότε η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου (Ο) είναι: $y_{(O)} = 2 \cdot 10^{-2} ημ(40πt' + π)$ (S.I) με $t' \geq 0$ και αντίστοιχα η εξίσωση του αρμονικού κύματος:

$$y = 2 \cdot 10^{-2} ημ\left[40π(t' - \frac{x}{2}) + π\right] \text{ με } t' \geq 0. \text{ Τότε για t'=0,2s (t=0,6s) έχουμε:}$$

$$εφ = \left[40π(t' - \frac{x}{2}) + π\right] \xRightarrow{t'=0,2s} π = 40π \cdot 0,2 - 20πx + π \Rightarrow x = 0,4m \text{ και}$$

$$y_{(O)} = 2 \cdot 10^{-2} ημ(9π) = 0, \; V_{(O)} = -V_{max}.$$

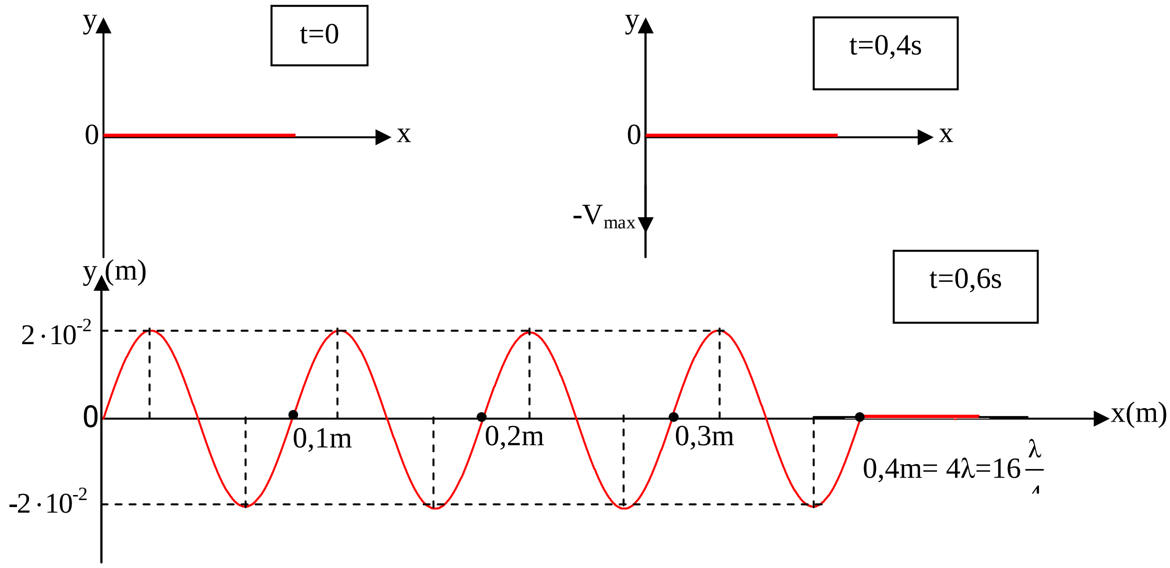
Οπότε σχεδιάζουμε το ζητούμενο στιγμιότυπο για τη χρονική στιγμή t'=0,2s δηλαδή τη χρονική στιγμή t=t'+0,4=0,6s.

γ. Η χρονική στιγμή που φθάνει στην επιφάνεια του νερού το 5^o κατά σειρά σφαιρίδιο είναι η t=0,4+4T=0,6sec (τα σφαιρίδια πέφτουν ανά T=0,05s), δηλαδή το σημείο στη θέση (O) έχει χρόνο ταλάντωσης 4T=0,2s και το κύμα αναμένεται να έχει διαδοθεί σε μήκος 4λ=0,4m κατά μήκος της Ox.

Πράγματι από την έκφραση της φάσης: $\varphi=40\pi(t-\frac{x}{2})-15\pi$ θέτοντας για t=0,6s, φ=π έχουμε:

$$\pi=40\pi(0,6-\frac{x}{2})-15\pi \Rightarrow \pi=24-20x-15\pi \Rightarrow \pi=9\pi-20x\pi \Rightarrow 20x\pi=8\pi \Rightarrow x=0{,}4m=4\lambda=16\frac{\lambda}{4}.$$

Τα στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές t=0s, t=0,4s και t=0,6s που φθάνει στη θέση (O) το 5^o σφαιρίδιο αντίστοιχα είναι:



Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

Ξ. Στεργιάδης