Εξίσωση αρμονικού κύματος

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους ***A*** και συχνότητας ***f=10Hz*** διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο στη διεύθυνση του άξονα x'Ox και προς την θετική κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου ***4m/s***. Το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή O(x=0) του άξονα τη χρονική στιγμή ***t=0*** βρίσκεται για ***2η φορά*** σε ακραία θέση ταλάντωσης έχοντας διαγράψει μήκος τροχιάς ***s=0,6m*** από την στιγμή που ξεκίνησε να ταλαντώνεται, και για την φάση ταλάντωσής του την ίδια χρονική στιγμή ισχύει $\boldsymbol{\varphi_{(x=0,t=0)}} > 2\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{rad}$.

α. Να διερευνήσετε προς ποια κατεύθυνση κινείται κάθε υλικό σημείο του μέσου όταν φτάνει σε αυτό το κύμα.

β. Να υπολογίσετε το πλάτος Α και το μήκος λ.

γ. Να βρείτε μέχρι ποιο σημείο Κ του μέσου έχει διαδοθεί το κύμα την χρονική t=0.

δ. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

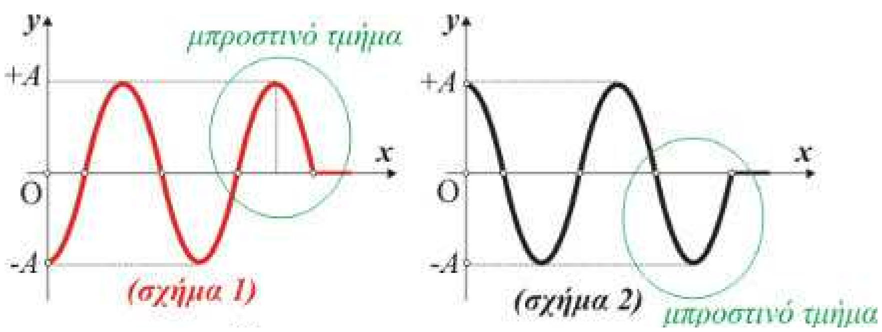
ε. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος στον θετικό ημιάξονα Ox τη χρονική στιγμή $t_1=T+\frac{T}{4}$, όπου Τ η περίοδος του κύματος.

στ. Να βρείτε τη δύναμη επαναφοράς που δέχεται ένα υλικό σημείο Μ του ελαστικού μέσου μάζας ***0,01g*** μετά από χρόνο $\boldsymbol{\Delta t = \frac{1}{24}\,s}$ από τη στιγμή που ξεκίνησε να ταλαντώνεται.

Δίνεται: $\pi^2=10$

Λύση:

α) Κατά τη διάδοση ενός αρμονικού κύματος σε ένα ελαστικό μέσο, τα υλικά σημεία του μέσου είναι ακίνητα στην θέση ισορροπίας(θέση ηρεμίας) μέχρι να φτάσει σε αυτά το κύμα. Όταν φτάνει σε ένα σημείο του μέσου, το εξαναγκάζει να κινηθεί κατακόρυφα είτε προς τα πάνω οπότε η φάση ταλάντωσης του σημείου την στιγμή αυτή είναι 0 και το μπροστινό μέρος του κύματος έχει τη μορφή όρους(σχήμα 1), είτε προς τα κάτω οπότε η φάση ταλάντωσης του σημείου την στιγμή αυτή είναι π rad και το μπροστινό μέρος του κύματος έχει τη μορφή κοιλάδας (σχήμα 2).



Στην συγκεκριμένη περίπτωση το σημείο Ο που το θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων την t=0 βρίσκεται για 2η φορά σε ακραία θέση ταλάντωσης που σημαίνει ότι έχει αρχίσει να ταλαντώνεται πριν από τη στιγμή t=0, οπότε αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη χρονική στιγμή t=0 το κύμα να έχει διαδοθεί ήδη σε κάποια απόσταση πέρα από το σημείο Ο.

Εφόσον το σημείο Ο βρίσκεται σε ακραία θέση ταλάντωσης για 2η φορά από την στιγμή που ξεκίνησε να ταλαντώνεται δηλαδή έχει διαγράψει την διαδρομή

y=0 (θέση ηρεμίας)→ ακραία θέση(1η φορά)→ y=0 → ακραία θέση(2η φορά) η φάση ταλάντωσής του έχει **μεταβληθεί** κατά $\boldsymbol{\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} rad}$ από την στιγμή που ξεκίνησε να ταλαντώνεται.

Το ερώτημα είναι: Το σημείο Ο ξεκίνησε να ταλαντώνεται προς τα πάνω ή προς τα κάτω;

Αν ξεκινούσε προς τα πάνω δηλαδή έχοντας μηδενική αρχική φάση $\varphi_{o(x=0)}=0$, τότε για τη φάση του σημείου Ο την χρονική στιγμή t=0 θα έπρεπε να ισχύει:

$$\Delta\varphi=\varphi_{(x=0,t=0)}-\varphi_{o(\chi=0)} \Rightarrow \varphi_{(x=0,t=0)}=\Delta\varphi+0=\frac{3\pi}{2} rad < 2\pi\, rad$$

Προφανώς, το σημείο Ο ξεκίνησε να ταλαντώνεται προς τα κάτω όταν έφτασε σε αυτό το κύμα δηλαδή έχοντας αρχική φάση ταλάντωσης $\varphi_{o(x=0)}=\pi$ rad, διότι τότε για τη φάση του σημείου Ο την χρονική στιγμή t=0 ισχύει:

$$\Delta\varphi=\varphi_{(x=0,t=0)}-\varphi_{o(\chi=0)} \Rightarrow \varphi_{(x=0,t=0)}=\Delta\varphi+\pi=\frac{5\pi}{2} rad > 2\pi\, rad$$

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Ο ξεκίνησε να ταλαντώνεται προς τα κάτω προς κάτω όταν έφτασε σε αυτό το κύμα, και προφανώς και **κάθε άλλο σημείο του μέσου ξεκινά να ταλαντώνεται προς τα κάτω** και άρα και το μπροστινό μέρος του κύματος θα έχει την μορφή κοιλάδας.

β) Κάθε σημείο του μέσου που ταλαντώνεται, διαγράφει μήκος τροχιάς s=4A σε κάθε πλήρη ταλάντωση. Εφόσον το σημείο Ο βρίσκεται για 2^η φορά σε ακραία θέση ταλάντωσης, έχει διαγράψει μήκος τροχιάς

$$s' = 3A \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 0,2m}}$$

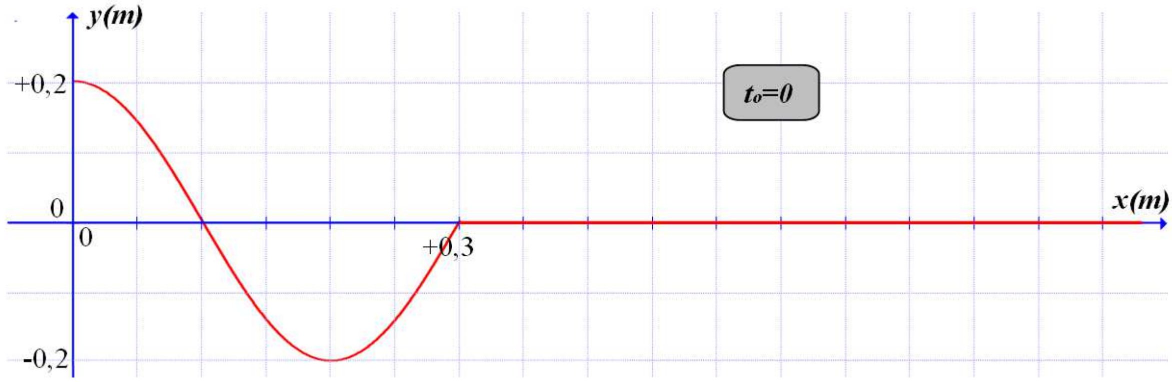
Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής

$$u = \lambda f \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\lambda = 0,4m}}$$

γ) Το σημείο Ο την t=0, ταλαντώνεται ήδη για χρονικό διάστημα $\Delta t=\frac{3T}{4}$(ώστε να διαγράψει την απόσταση(y=0→y=-A→y=0→y=+A), άρα το κύμα έχει διαδοθεί κατά $\frac{3\lambda}{4}$ πέρα από το σημείο Ο, άρα την χρονική στιγμή t=0, το κύμα έχει φτάσει στο σημείο Κ με:

$$x_K=\frac{3\lambda}{4} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x_K = +0,3m}}$$

Δηλαδή το στιγμιότυπο την χρονική στιγμή t_o=0 είναι:



δ) Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Κ που ξεκινά να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή t=0 με φορά προς τα κάτω(u<0) θα είναι:

y_K=Αημ(ωt+π)⇒ y_K=Αημ(2πft+π) ⇒y_K=0,2ημ(20πt+π)

Ένα σημείο Σ του ελαστικού μέσου στην θέση x του θετικού ημιάξονα δεξιά από το σημείο Κ ξεκινά να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{\Delta x}{u_\delta} = \frac{x - x_K}{u_\delta} = \frac{x - 0{,}3}{4}$$

Επομένως μια τυχαία χρονική στιγμή t το σημείο Σ θα ταλαντώνεται επί χρόνο $t-t_1=t - \frac{x-0{,}3}{4}$ και η εξίσωση απομάκρυνσής του θα είναι:

$$y(x,t) = A\eta\mu[\omega(t-t_1)+\pi] \Rightarrow y(x,t) = 0{,}2\eta\mu\left[20\pi\left(t - \frac{x-0{,}3}{4}\right)+\pi\right]$$

$$y(x,t) = 0{,}2 \cdot \eta\mu(20\pi t - 5\pi x + 1{,}5\pi + \pi) \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{y(x,t) = 0{,}2 \cdot \eta\mu(20\pi t - 5\pi x + 2{,}5\pi)}}$$

Παρατήρηση:

Όταν γράφουμε την εξίσωση του κύματος, ουσιαστικά συσχετίζουμε την εξίσωση ταλάντωσης κάποιου σημείου που είναι γνωστή, και η οποία λαμβάνεται ως **εξίσωση αναφοράς**, με την εξίσωση ταλάντωσης κάποιου σημείου στην θέση x του άξονα διάδοσης του κύματος. Στην παραπάνω περίπτωση ως εξίσωση αναφοράς θεωρήσαμε την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Κ στο οποίο φτάνει το κύμα την χρονική στιγμή t=0. Στο ίδιο αποτέλεσμα όμως θα καταλήγαμε εάν χρησιμοποιούσαμε ως εξίσωση αναφοράς, **την εξίσωση ταλάντωσης οποιουδήποτε άλλου σημείου για το οποίο γνωρίζουμε πώς ταλαντώνεται την χρονική στιγμή t=0**.

Για παράδειγμα για το σημείο O(x=0),η χρονική εξίσωση ταλάντωσης είναι:

$$y_O = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{5\pi}{2}\right) \Rightarrow y_O = 0{,}3\eta\mu\left(20\pi t + \frac{5\pi}{2}\right)$$

Το σημείο Σ του ελαστικού μέσου στην θέση x του θετικού ημιάξονα δεξιά από το σημείο Ο ξεκινά να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή

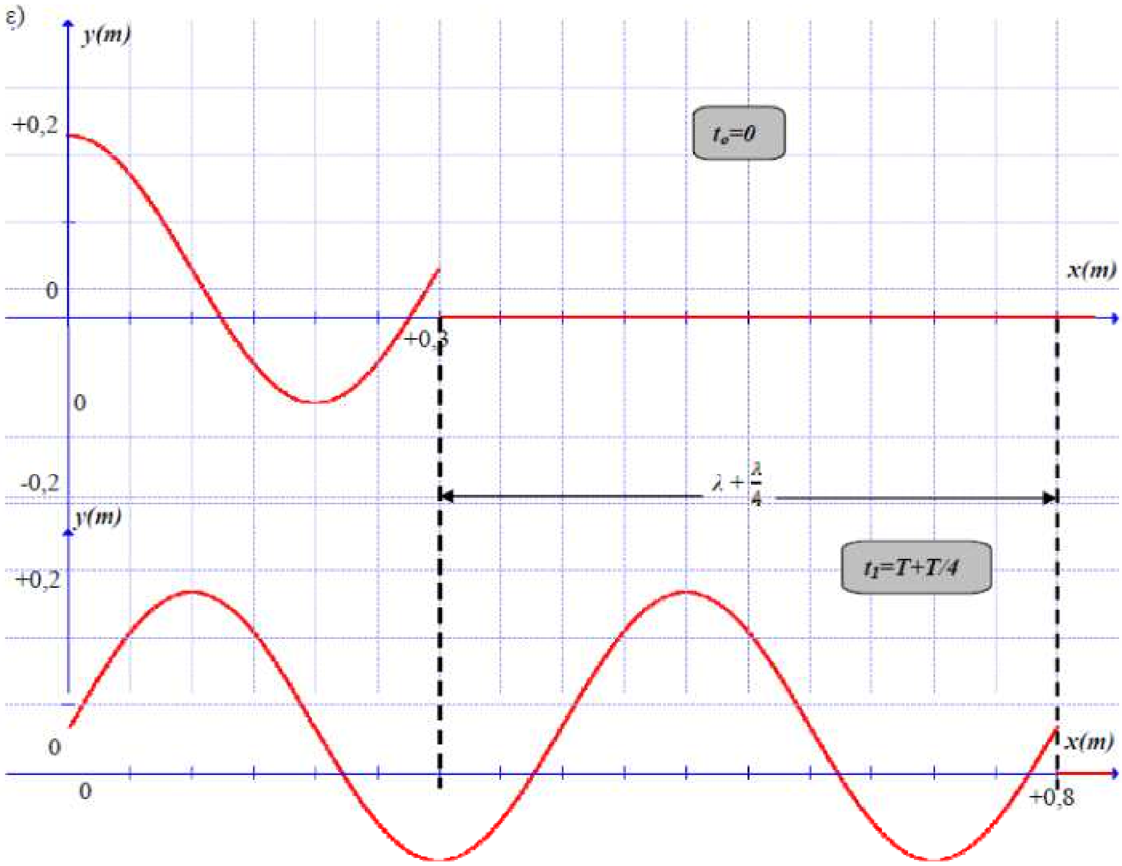
$$t_1 = \frac{\Delta x}{u_\delta} = \frac{x-0}{u_\delta} = \frac{x}{4}$$

Επομένως μια τυχαία χρονική στιγμή t το σημείο Σ θα ταλαντώνεται επί χρόνο $t-t_1=t - \frac{x}{4}$ και η εξίσωση απομάκρυνσής του θα είναι:

$$y(x,t) = A\eta\mu\left[\omega(t-t_1)+\frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow y(x,t) = 0{,}2\eta\mu\left[20\pi\left(t - \frac{x}{4}\right)+\frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{y(x,t) = 0{,}2 \cdot \eta\mu(20\pi t - 5\pi x + 2{,}5\pi)}}$$

ε)



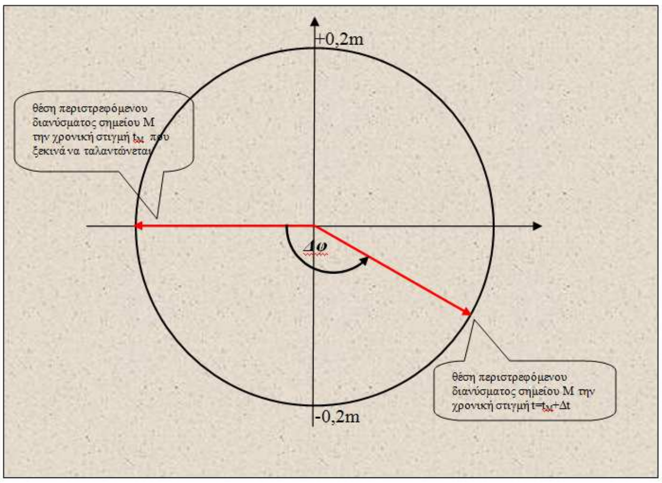
Το κύμα την χρονική στιγμή t_1=T+T/4 θα έχει διαδοθεί κατά $\lambda+\frac{\lambda}{4}$ πέρα από το σημείο Κ, δηλαδή θα έχει φτάσει μέχρι το σημείο

$$0{,}3+0{,}4+\frac{0{,}4}{4}=0{,}8m$$

Το στιγμιότυπο την χρονική στιγμή t1 προκύπτει από το στιγμιότυπο την χρονική στιγμή t_o=0 με μετατόπιση προς τα δεξιά κατά $\lambda+\frac{\lambda}{4}$

στ) Για την δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σημείο Μ ισχύει:

$$F_{\varepsilon\pi}=-Dy_M \text{ για } t\geq t_M$$



όπου t_M η χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο Μ και το εξαναγκάζει σε ταλάντωση. Η y_M θα μπορούσε εύκολα να υπολογιστεί εάν γνωρίζαμε την τετμημένη x_M του συγκεκριμένου σημείου, που όμως δεν την γνωρίζουμε.

Για να απαντήσουμε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το περιστρεφόμενο διάνυσμα για την ταλάντωση του σημείου Μ. Την χρονική στιγμή t_M, που το σημείο Μ ξεκινά να ταλαντώνεται, το περιστρεφόμενο διάνυσμα ταυτίζεται με τον αρνητικό ημιάξονα (εφόσον ξεκινά να ταλαντώνεται με φορά προς τα κάτω). Οπότε σε χρόνο $\Delta t = \frac{1}{24}s$ το περιστρεφόμενο διάνυσμα έχει διαγράψει επίκεντρη γωνία

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = 20\pi \cdot \frac{1}{24} = \frac{5\pi}{6} rad$$

Άρα για την απομάκρυνση του σημείου Μ ισχύει:

$$y = A\eta\mu(\Delta\varphi + \pi) = 0{,}2\eta\mu\left(\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = -0{,}2\eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -0{,}2\left(+\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{y_M = -0{,}1m}}$$

Άρα, η δύναμη επαναφοράς στο σημείο Μ είναι:

$$F_{\varepsilon\pi} = -Dy_M = -m\omega^2 y_M = -10^{-5} \cdot 400\pi^2 \cdot (-0{,}1) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F_{\varepsilon\pi} = +4 \cdot 10^{-3} N}}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Πέτρος Καραπέτρος