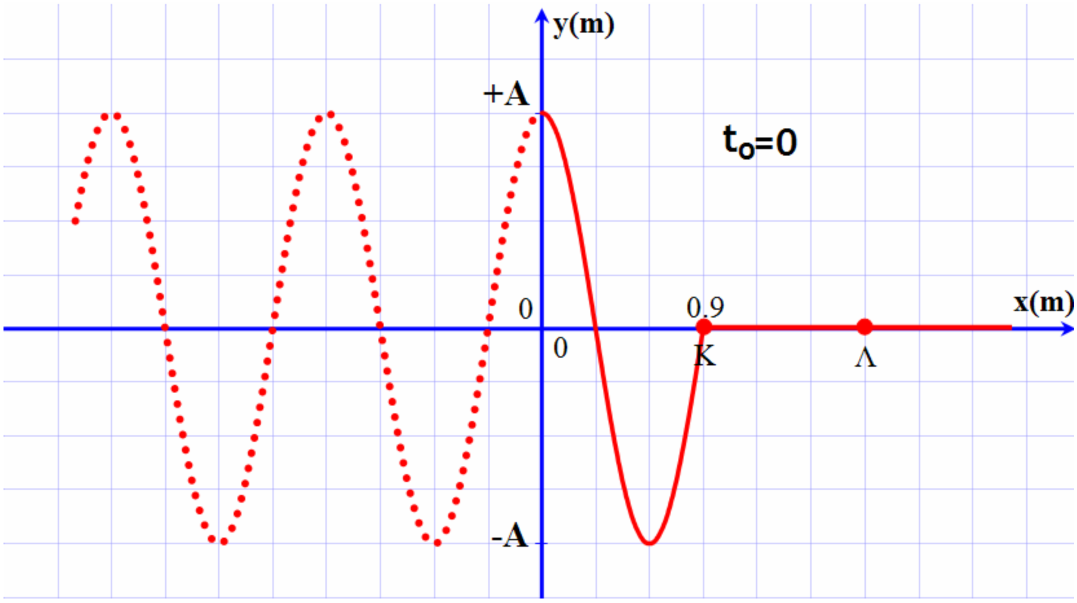
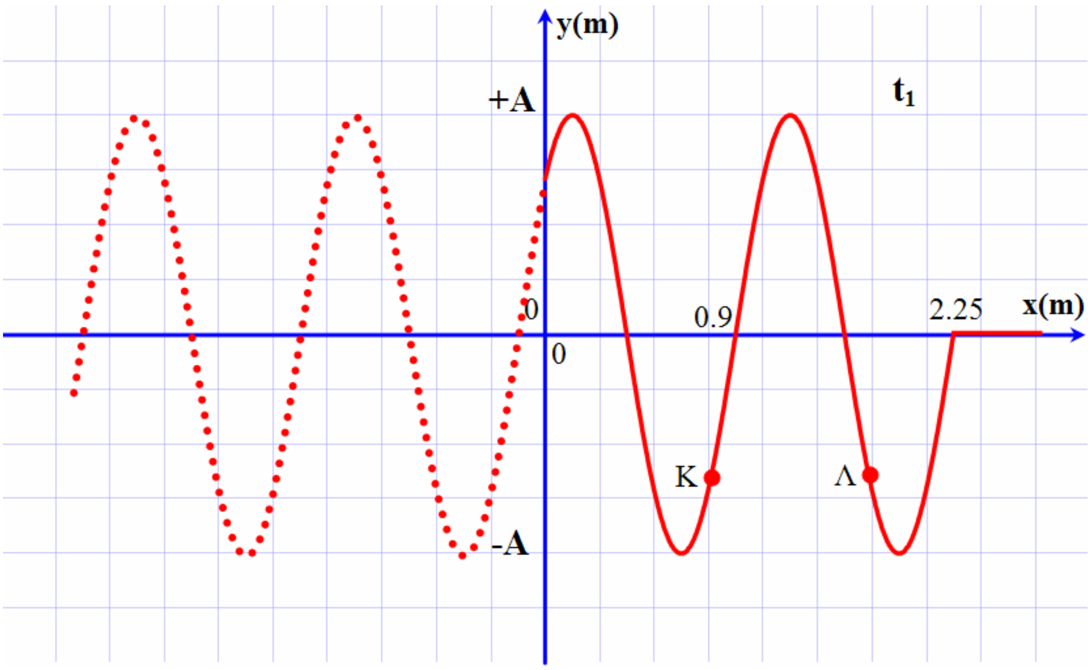
Αρμονικό κύμα.

Κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου που ταυτίζεται με τον άξονα x’x διαδίδεται αρμονικό κύμα αναγκάζοντας κάθε υλικό σημείο του μέσου να διέρχεται 10 φορές από την θέση ισορροπίας του το δευτερόλεπτο και να διατρέχει απόσταση 1,6m σε κάθε πλήρη ταλάντωσή του. Στο διάγραμμα δίνεται το στιγμιότυπο του κύματος τις χρονικές στιγμές t_o=0 και t_1.





α. Να βρεθεί η εξίσωση διάδοσης του κύματος.

β. Να γραφεί η εξίσωση του αρμονικού κύματος.

γ. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1.

δ. Να βρεθεί η διαφορά φάσης των σημείων Κ και Λ τις χρονικές στιγμές t_o και t_1.

ε. Να βρεθεί η διεύθυνση ταλάντωσης των σημείων Κ και Λ την χρονική στιγμή t_1.

ε. Πόσα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται στον θετικό ημιάξονα απέχουν απόσταση 0,2m από τη θέση ισορροπίας τους την χρονική στιγμή t_2=0,45s.

στ. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων Κ και Λ την χρονική στιγμή t_2.

Απάντηση:

α) Κάθε σωματίδιο του ελαστικού μέσου κατά την διάρκεια μίας πλήρους ταλάντωσης διέρχεται 2 φορές από την θέση ισορροπίας του, άρα όταν έχει διέλθει 10 φορές από αυτήν έχει εκτελέσει 5 πλήρεις ταλαντώσεις. Άρα:

$$f = \frac{N}{\Delta t} \rightarrow f = 5Hz$$

Από το στιγμιότυπο την t=0 προκύπτει ότι:

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = 0{,}9 \rightarrow \lambda = 1{,}2m$$

Οπότε από θεμελιώδη εξίσωση κυματικής:

$$u_\delta = \lambda \cdot f \rightarrow u_\delta = 1{,}2 \cdot 5 \rightarrow u_\delta = 6m/s$$

β) Κάθε σημείο του ελαστικού μέσου διατρέχει απόσταση s=4A σε κάθε πλήρη ταλάντωση, οπότε

$$4A=1{,}6m \rightarrow A=0{,}4m$$

Επίσης: $\omega=2\pi f \rightarrow \omega=10\pi$ rad/s

Παρατηρούμε ότι το κύμα την χρονική στιγμή t_o=0 έχει φτάσει στο σημείο Κ με τετμημένη θέσης x_K=+0,9m, εξαναγκάζοντάς το να κινηθεί προς την θέση της μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσής του –Α. Άρα, η εξίσωση ταλάντωσης του Κ θα είναι:

$$y_K=A\eta\mu(\omega t+\varphi_o) \rightarrow y_K=0{,}4\eta\mu(10\pi t+\pi)$$

Σε ένα τυχαίο σημείο Σ που βρίσκεται στην θέση x του θετικού ημιάξονα το κύμα φτάνει την χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{x - 0{,}9}{u_\delta}$ εξαναγκάζοντας σε απόλυτα όμοια ταλάντωση με αυτή του σημείου Κ (δηλαδή και οποιοδήποτε άλλο σημείο του μέσου ξεκινά να ταλαντώνεται από την Θ.Ι. προς την θέση y=-A), οπότε η εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του(δηλαδή η εξίσωση του αρμονικού κύματος) θα είναι:

$$y = A \cdot ημ[ω(t - t_1) + π] \rightarrow y = 0,4 \cdot ημ[10π \cdot (t - \frac{x - 0,9}{6}) + π] \rightarrow$$

$$\mathbf{y = 0,4 \cdot ημ\left(10π \cdot t - \frac{5π \cdot x}{3} + 2,5π\right)}$$

Σχόλιο: Κατά την εξαγωγή της εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι σημαντικό να πείσουμε τον μαθητή, ότι βγάζει την εξίσωση απομάκρυνσης ενός τυχαίου σημείου x γνωρίζοντας την εξίσωση απομάκρυνσης ενός άλλου σημείου, δηλαδή χρησιμοποιώντας μία εξίσωση αναφοράς. Ως εξίσωση αναφοράς μπορούμε να χρησιμοποιούμε την εξίσωση απομάκρυνσης οποιουδήποτε σημείου το οποίο την t=0 ταλαντώνεται, δηλαδή η διαταραχή έχει φτάσει σε αυτό, ΚΑΙ ΟΧΙ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ Ο(x=0).

Στην συγκεκριμένη περίπτωση ως εξίσωση αναφοράς χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου Κ, που είναι το σημείο το οποίο αρχίζει να ταλαντώνεται την t_o=0.

Στην ίδια ακριβώς εξίσωση θα καταλήγαμε εάν δουλεύαμε με βάση την εξίσωση απομάκρυνσης την t=0.

Ας το δοκιμάσουμε. Παρατηρούμε ότι το κύμα την t=0 έχει διαδοθεί κατά 3λ/4 από το σημείο Ο(x=0) που σημαίνει ότι η φάση του σημείου αυτού θα έχει μεταβληθεί κατά $\frac{3π}{2}$rad , και θα είναι:

$$φ_O=ωt+π+\frac{3π}{2} = ωt + \frac{5π}{2}$$

Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου Ο είναι:

$$y_O=0,4ημ\left(ωt + \frac{5π}{2}\right)$$

Σε ένα τυχαίο σημείο Σ που βρίσκεται στην θέση x του θετικού ημιάξονα το κύμα φτάνει την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{x}{u_δ}$ εξαναγκάζοντας σε απόλυτα όμοια ταλάντωση με αυτή του σημείου Ο.

$$y = A \cdot ημ\left[ω(t - t_1) + \frac{5π}{2}\right] \rightarrow y = 0,4 \cdot ημ\left[10π \cdot (t - \frac{x}{6}) + \frac{5π}{2}\right]$$

$$\rightarrow \mathbf{y = 0,4 \cdot ημ\left(10π \cdot t - \frac{5π \cdot x}{3} + 2,5π\right)}$$

γ. Η φάση του κύματος είναι η γωνία:

$$φ = 10π \cdot t - \frac{5x}{3} + 2,5π$$

Για να βρούμε την t_1 θέτουμε φ=π rad και x=2,25m

$$π = 10π \cdot t_1 - \frac{5π \cdot 2,25}{3} + 2,5π$$

$$\rightarrow -1,5π = 10π \cdot t_1 - 3,75π$$

$$\rightarrow 2,25π = 10π \cdot t_1$$

t_1=0,225s

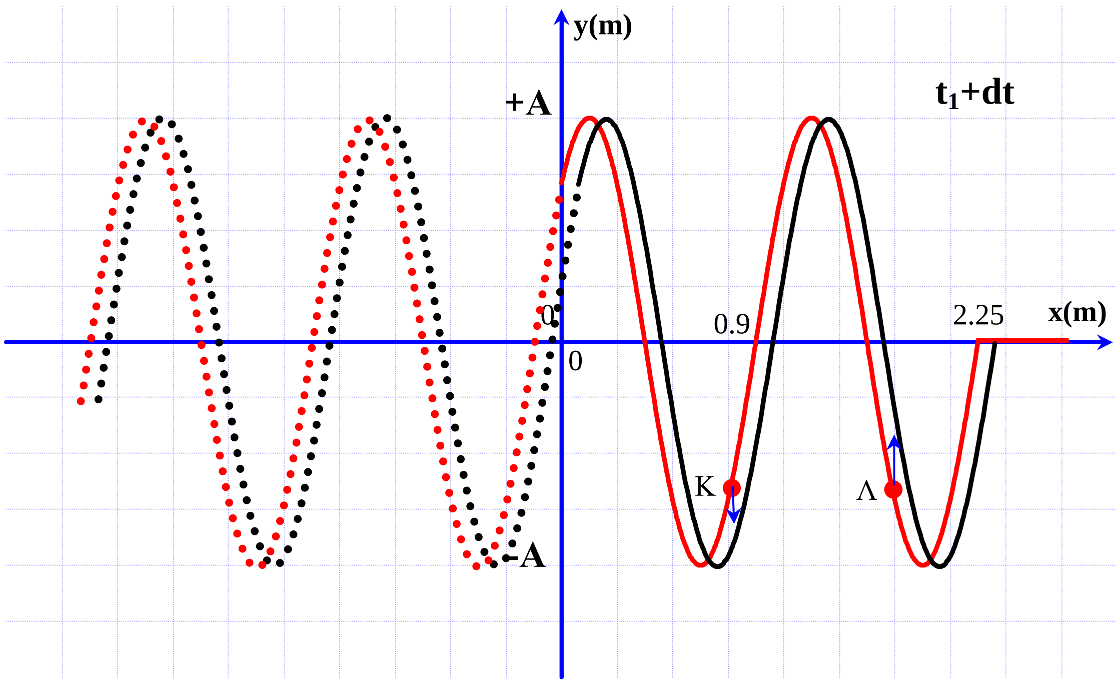
δ. Την χρονική στιγμή t_o=0 το σημείο Κ μόλις αρχίζει να ταλαντώνεται, οπότε η φάση του είναι $\varphi_K=\pi$ rad, ενώ το κύμα δεν έχει ακόμα φτάσει στο σημείο Λ, οπότε $\varphi_\Lambda=0$. Άρα:

$$\Delta\varphi=\varphi_K-\varphi_\Lambda=\pi \text{ rad}$$

Την χρονική t_1 και τα δύο σημεία ταλάντώνονται, οπότε η διαφορά φάσης μεταξύ τους είναι:

$$\Delta\varphi=\varphi_K-\varphi_\Lambda=\frac{2\pi\cdot\Delta x}{\lambda}=\frac{2\pi\cdot{}^{3\lambda}\!/_{4}}{\lambda}\rightarrow \boldsymbol{\Delta\varphi=\frac{3\pi}{2}\text{rad}}$$

ε. Κάθε σωματίδιο του ελαστικού μέσου ταλαντώνεται, επειδή εξαναγκάζεται σε ταλάντωση από τα γειτονικά του προς την πλευρά της πηγής. Επομένως κάθε σωματίδιο του ελαστικού μέσου την χρονική στιγμή t+dt θα βρεθεί κατακόρυφα σε απομάκρυνση από την Θ.Ι. ίδια με αυτή που βρίσκονται τα γειτονικά του την χρονική στιγμή t. Επομένως, έχοντας το στιγμιότυπο την χρονική στιγμή t_1 και γνωρίζοντας την φορά διάδοσης του κύματος(προς τα δεξιά) μπορούμε μετατοπίζοντας τα λίγο προς τα δεξιά, να φτιάξουμε το στιγμιότυπο την χρονική στιγμή t_1+dt.

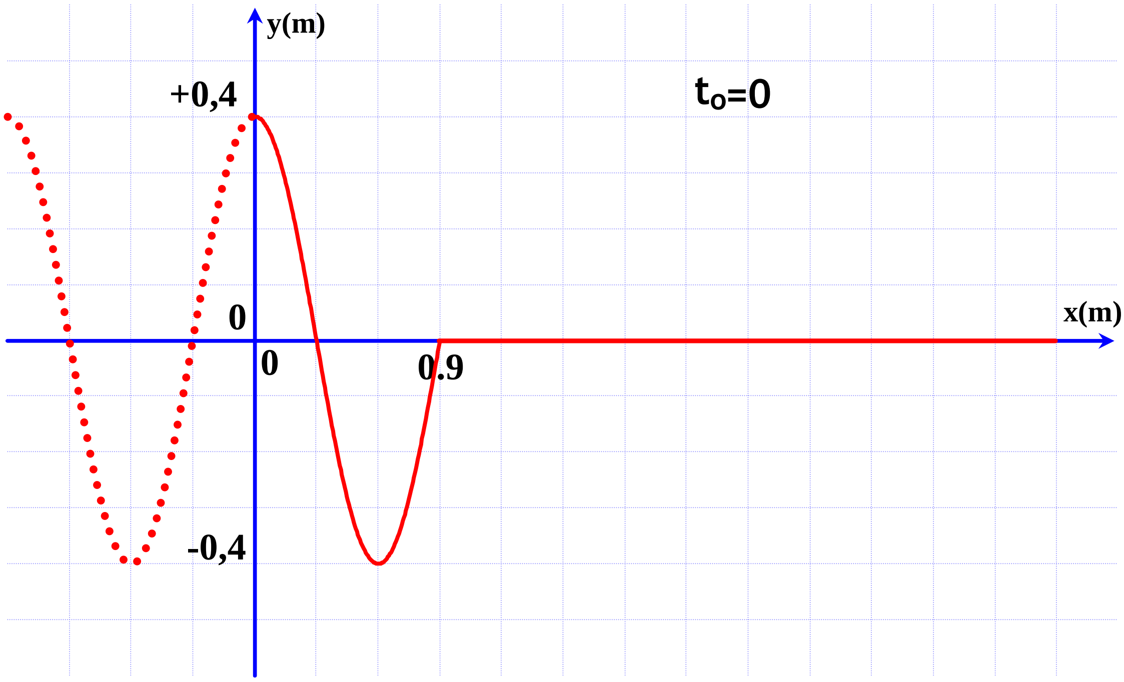


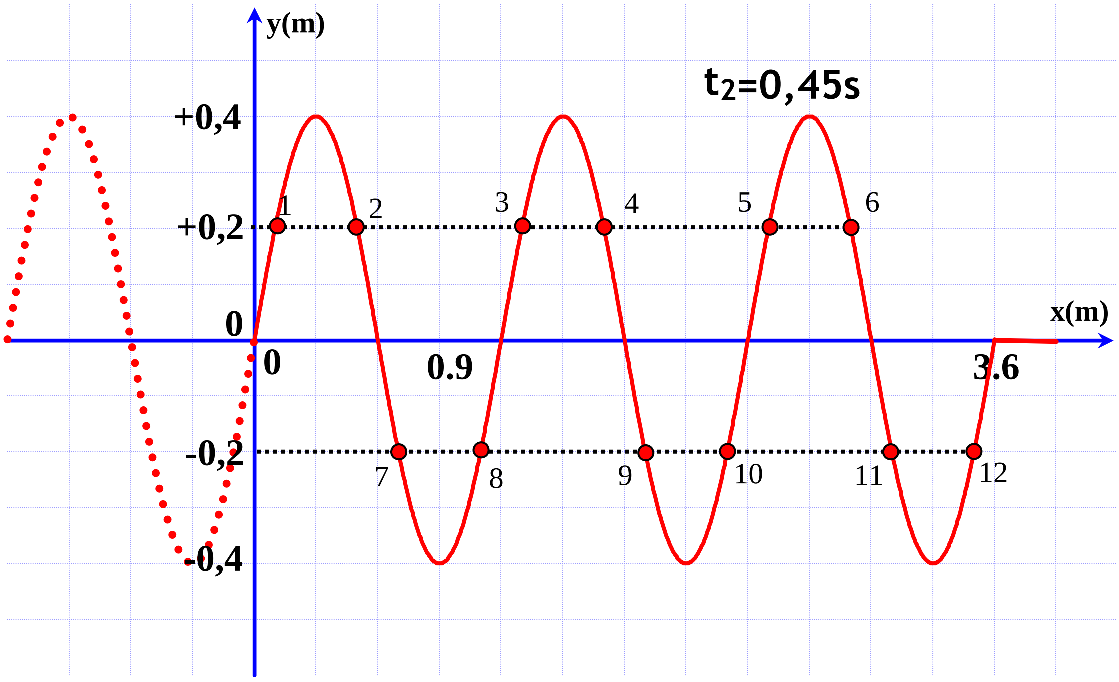
Παρατηρούμε λοιπόν ότι το σημείο Κ κινείται προς τα κάτω, και το σημείο Λ προς τα πάνω.

στ. Η χρονική στιγμή t_2=0,45s αντιστοιχεί σε $2T+\frac{T}{4}$. Σε αυτό το χρονικό διάστημα η διαταραχή θα έχει μετατοπιστεί κατά $2\lambda+\frac{\lambda}{4}$. Με βάση το στιγμιότυπο του κύματος την t=0, το μετατοπίζουμε προς τα δεξιά κατά $2\lambda+\frac{\lambda}{4}$.

Απόσταση ίση με 0,2m θα απέχουν τα σωματίδια του μέσου διάδοσης που βρίσκονται σε απομάκρυνση y=+0,2m και y=-0,2m

Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο του κύματος την t_2 **12 σημεία** απέχουν απόσταση 0,2m από την Θ.Ι. τους.





στ. Η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας την χρονική στιγμή t_2=0,45s του σημείου Κ(x_K=+0,9m) είναι:

$$y_K = 0{,}4 \cdot ημ\left(10π \cdot 0{,}45 - \frac{5π \cdot 0{,}9}{3} + 2{,}5π\right) = 0{,}4 \cdot ημ5{,}5π = 0{,}4 \cdot ημ\frac{3π}{2} = -0{,}4m$$

Η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας την χρονική στιγμή t_2=0,45s του σημείου Λ($x_Λ$=x_K+3λ/4=1,8m) είναι:

$$y_\Lambda = 0,4 \cdot \eta\mu\left(10\pi \cdot 0,45 - \frac{5\pi \cdot 1,8}{3} + 2,5\pi\right) = 0,4 \cdot \eta\mu 4\pi = 0\,\mathrm{m}$$

Άρα, η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$d = \sqrt{(y_K - y_\Lambda)^2 + (x_K - x_\Lambda)^2}$$
$$\rightarrow d = \sqrt{0,4^2 + 0,9^2}$$
$$\rightarrow d = \sqrt{0,16 + 0,81}$$
$$\rightarrow \mathbf{d} = \sqrt{\mathbf{0,97m}}$$

Επιμέλεια

Πέτρος Καραπέτρος