Αρμονικό κύμα και τι συμβαίνει την στιγμή t=0.

Σε ένα γραμμικό μέσο x'Ox διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα προς την θετική κατεύθυνση. Δύο σημεία του μέσου Μ και Ν που απέχουν d_{MN}=1m, δέχονται το κύμα με διαφορά χρόνου Δt=1s, με το Μ να αρχίζει πρώτο την ταλάντωσή του. Η εξίσωση ταλάντωσης του Ν είναι:

$$\mathbf{y_N=0{,}5\eta\mu(10\pi t-12\pi)\ (S.I.).}$$

α. Ποια η ταχύτητα διάδοσης του κύματος;

β. Ποιο είναι το μήκος κύματος;

γ. Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου Μ σε σχέση με τον χρόνο.

δ. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή:

i) Την χρονική στιγμή t=0, το κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο O(x=0)

ii) Την χρονική στιγμή t=0, το κύμα έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο O(x=0)

iii) Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε με βάση τα δεδομένα του προβλήματος

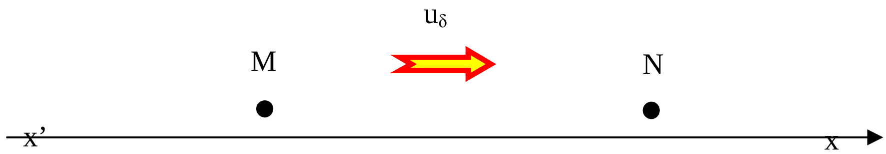
ε. Όταν το σημείο Ν βρίσκεται στην μέγιστη θετική απομάκρυνση από την Θ.Ι. του να υπολογίσετε την απομάκρυνση:

i. ενός σημείου Κ που αρχίζει να ταλαντώνεται νωρίτερα από το Ν και απέχει από αυτό απόσταση 0,1m.

ii. ενός σημείου Λ που αρχίζει να ταλαντώνεται αργότερα από το Ν και απέχει από αυτό απόσταση $\frac{0{,}4}{3}m$.

Λύση:

α.



$$u=\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow u=1m/s$$

β. Από την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Ν προκύπτει ω=10π rad/s

Όμως: $\omega=2\pi f \rightarrow f=\frac{\omega}{2\pi}=5Hz$

Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής: $u_\delta=\lambda\cdot f \rightarrow \lambda=\frac{u_\delta}{f} \rightarrow \boldsymbol{\lambda=0{,}2m}$

γ. Η διαφορά φάσης Δφ των ταλαντώσεων των σημείων Μ και Ν οφείλεται στο γεγονός ότι το κύμα δεν φτάνει ταυτόχρονα στα δύο σημεία. Άρα:

$$\Delta\varphi=\omega\cdot\Delta t$$

όπου Δt το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το κύμα να ταξιδέψει από το σημείο Μ στο σημείο Ν.

Έτσι:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{d_{M\to N}}{u_\delta} \to \Delta\varphi = \frac{2\pi\cdot d_{M\to N}}{\lambda} \to \Delta\varphi = \frac{2\pi\cdot 1}{0,2} \to \Delta\varphi = 10\pi \text{ rad/s}$$

Όμως:

$$\varphi_M - \varphi_N = 10\pi \to \varphi_M = \varphi_N + 10\pi = \omega t - 12\pi + 10\pi \to \varphi_M = 10\pi t - 2\pi$$

Άρα:

$$y_M = 0,5\eta\mu\varphi_M \to \mathbf{y_M = 0,5\eta\mu(10\pi t - 2\pi)\ (S.I.)}$$

Σχόλιο: Κάποιοι μαθητές εδώ παίρνουν την εξίσωση αρμονικού κύματος

$$y = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A\eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

και συγκρίνοντάς τη με την $y_N=0,5\eta\mu(10\pi t-12\pi)$ βρίσκουν $x_N=1,2m$ και $x_M=0,2m$ και στη συνέχεια με αντικατάσταση στην εξίσωση αρμονικού κύματος y(x,t) βρίσκουν $y_M=0,5\eta\mu(10\pi t - 2\pi)$.

Το ερώτημα που γεννιέται:

Έχω το δικαίωμα να το κάνω αυτό;

Κατά την γνώμη μου είναι πώς ΟΧΙ. Η εξίσωση του κύματος:

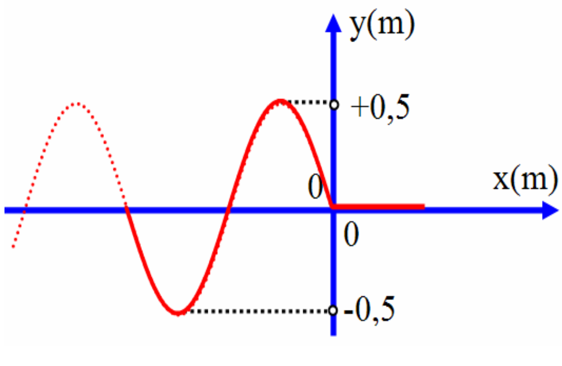
$$y = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A\eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

ισχύει όταν η αρχή μέτρησης των αποστάσεων Ο(x=0) αρχίζει να ταλαντώνεται χωρίς αρχική φάση, δηλαδή αρχίζει να ταλαντώνεται την t=0 με θετική ταχύτητα(προς τα πάνω). Αυτό όμως στην συγκεκριμένη περίπτωση άσκησης **δεν γνωρίζουμε εάν ισχύει ούτε μπορούμε με τα δεδομένα που έχουμε να το βρούμε.**

Προσέξτε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1η Περίπτωση:

Αρμονικό κύμα πλάτους 0,5m, συχνότητας f=5Hz και λ=0,2m διαδίδεται σε γραμμικό μέσο x'Ox και την t=0 φτάνει στο x=0 αναγκάζοντας το να κινηθεί με θετική ταχύτητα(προς τα πάνω).



Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Ο είναι:

$$y_O = A\eta\mu\omega t$$

Ένα τυχαίο σημείο που βρίσκεται στη θέση x του θετικού ημιάξονα ξεκινά να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή $t_1=\frac{x}{u_\delta}$, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης ταλάντωσής του είναι:

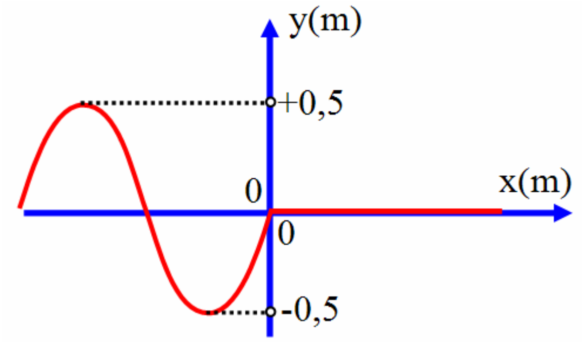
$$y = A \cdot \eta\mu\omega(t - t_1) = 0{,}5 \cdot \eta\mu 10\pi(t - \frac{x}{1}) \rightarrow \mathbf{y=0{,}5\eta\mu(10\pi t-10\pi x)}$$

Άρα, το σημείο Ν στην θέση $\mathbf{x_N=+1{,}2m}$ έχει εξίσωση απομάκρυνσης:

$$\mathbf{y_N=0{,}5\eta\mu(10\pi t-12\pi)}$$

2η Περίπτωση:

Αρμονικό κύμα πλάτους 0,5m, συχνότητας f=5Hz και λ=0,2m διαδίδεται σε γραμμικό μέσο x'Ox και την t=0 φτάνει στο x=0 αναγκάζοντας το να κινηθεί με αρνητική ταχύτητα(προς τα κάτω).



Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Ο είναι:

$$y_O=A\eta\mu(\omega t+\pi)$$

Ένα τυχαίο σημείο που βρίσκεται στη θέση x του θετικού ημιάξονα ξεκινά να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή $t_1=\frac{x}{u_\delta}$, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης ταλάντωσής του είναι:

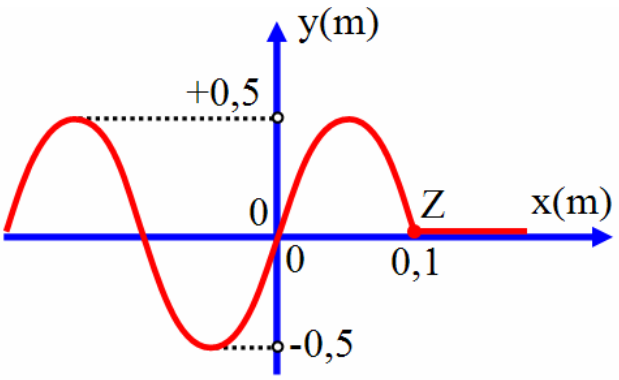
$$y = A \cdot \eta\mu[\omega(t - t_1) + \pi] = 0{,}5 \cdot \eta\mu[10\pi \cdot (t - \frac{x}{1}) + \pi] \rightarrow \mathbf{y=0{,}5\eta\mu(10\pi t-10\pi x+\pi)}$$

Άρα, το σημείο Ν στην θέση $\mathbf{x_N=+1{,}3m}$ έχει εξίσωση απομάκρυνσης:

$$\mathbf{y_N=0{,}5\eta\mu(10\pi t-12\pi)}$$

3η Περίπτωση:

Αρμονικό κύμα πλάτους 0,5m, συχνότητας f=5Hz και λ=0,2m διαδίδεται σε γραμμικό μέσο x'Ox και την t=0 φτάνει στο σημείο Ζ με τετμημένη x_Z=0,2m αναγκάζοντας το να κινηθεί με θετική ταχύτητα.



Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου αυτού είναι:

$$y_Z=A\eta\mu\omega t$$

Ένα τυχαίο σημείο που βρίσκεται στη θέση x του θετικού ημιάξονα ξεκινά να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή $t_1=\frac{x-0{,}1}{u_\delta}$, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης ταλάντωσής του είναι:

$$y = A \cdot \eta\mu\omega(t - t_1) = 0{,}5 \cdot \eta\mu 10\pi(t - \frac{x-0{,}1}{1}) \rightarrow \mathbf{y=0{,}5\eta\mu(10\pi t-10\pi x+\pi)}$$

Άρα, το σημείο Ν στην θέση $\mathbf{x_N=+1{,}3m}$ έχει εξίσωση απομάκρυνσης:

$$\mathbf{y_N=0{,}5\eta\mu(10\pi t-12\pi)}$$

Επομένως, ΜΟΝΟ ΕΑΝ ΔΙΝΕΤΑΙ Η ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΘΕΣΗΣ του σημείου Ν, μπορεί να ισχύσει η γνωστή εξίσωση κύματος και γενικά μπορούμε να πούμε πώς για να χρησιμοποιήσω κάποια εξίσωση αρμονικού κύματος θα πρέπει να γνωρίζουμε και την θέση του σημείου Ν ΑΛΛΑ ΚΑΙ ΤΟΝ ΤΡΟΠΟ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΟΤΑΝ ΦΤΑΝΕΙ Σ' ΑΥΤΑ ΤΟ ΚΥΜΑ(προς τα πάνω ή προς τα κάτω).

δ. Όπως φαίνεται από το (γ) σωστό είναι το (iii).

ε. i) Η διαφορά φάσης των σημείων Κ και Ν είναι:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \cdot \frac{d_{\mathrm{K}\to N}}{\mathrm{u}_\delta} \to \Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot d_{\mathrm{K}\to N}}{\lambda} \to \Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot 0{,}1}{0{,}2} \to \Delta\varphi = \pi\, rad$$

Άρα: $\varphi_K - \varphi_N = \pi \to \varphi_K = \varphi_N + \pi$

Οπότε:

$$y_K = A \cdot \eta\mu\varphi_K = \mathrm{A} \cdot \eta\mu(\varphi_N + \pi) = -\mathrm{A}\eta\mu\varphi_N = -y_N$$

Άρα: **$y_K = -0{,}5$m**

ii) Η διαφορά φάσης των σημείων Ν και Λ είναι:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \cdot \frac{d_{N\to\Lambda}}{\mathrm{u}_\delta} \to \Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot d_{N\to\Lambda}}{\lambda} \to \Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot 0{,}4/3}{0{,}2} \to \Delta\varphi = \frac{4\pi}{3} rad$$

Άρα: $\varphi_N - \varphi_\Lambda = 4\pi/3 \to \varphi_\Lambda = \varphi_N - \frac{4\pi}{3}$

Οπότε:

$$y_\Lambda = A \cdot \eta\mu\varphi_K = \mathrm{A} \cdot \eta\mu\left(\varphi_N - \frac{4\pi}{3}\right) = \mathrm{A}\left[\eta\mu\varphi_N \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\varphi_N \cdot \eta\mu\frac{4\pi}{3}\right]$$

και επειδή το σημείο Ν βρίσκεται σε ακραία θέση ταλάντωσης $u_N=0 \to \sigma\upsilon\nu\varphi_N=0$, άρα:

$$y_\Lambda = \mathrm{A}\eta\mu\varphi_N \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}$$

$$y_\Lambda = y_N\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$y_\Lambda = -0{,}25$m

Επιμέλεια

Πέτρος Καραπέτρος