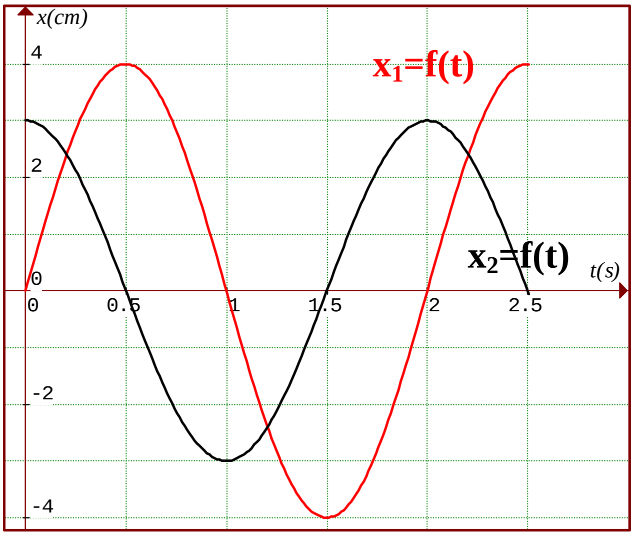
Σύνθετη ταλάντωση και ρυθμός μεταβολής.

Ένα σώμα μάζας m=1kg εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις x_1=f(t) και x_2=f(t) της ίδιας διεύθυνσης, που πραγματοποιούνται γύρω από το ίδιο σημείο. Οι γραφικές παραστάσεις που περιγράφουν τις ταλαντώσεις αυτές δίνονται στο σχήμα.



i) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης x_1=f(t) και x_2=f(t).

ii) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης.

iii) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για δεύτερη φορά.

iv) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας την χρονική στιγμή t=5s.

Δίνεται: εφ$\frac{\pi}{5}=\frac{3}{4}$, $ημ\frac{\pi}{5}=\frac{3}{5}$, $συν\frac{\pi}{5}=\frac{4}{5}$, π^2=10.

Απάντηση:

i) Από την γραφική παράσταση προκύπτουν οι χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης των συνιστωσών ταλαντώσεων.

Ταλάντωση x_1=f(t): Παρατηρούμε ότι για t=0 το σώμα βρίσκεται στην θέση x=0 και κινείται προς την $x_1=+A_1$, οπότε η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση. Άρα:

$$x_1=A_1ημωt$$

όπου A_1=4cm και $T_1=T_2$=2s οπότε $\omega=\frac{2\pi}{T_1}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{2}=\pi$ rad/s

Άρα:

$$x_1=4ημπt$$

Ταλάντωση x_2=f(t): Παρατηρούμε ότι για t=0 το σώμα βρίσκεται στην θέση $x_2=+A_2$, οπότε η ταλάντωση έχει αρχική φάση $φ_o$. Άρα:

$$x_2=A_2ημ(\omega_2t+φ_o)$$

Προσδιορισμός αρχική φάσης:

$$+A_2=A_2\eta\mu\varphi_o \Rightarrow \eta\mu\varphi_o=1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_o=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\varphi_o=2k\pi+\frac{\pi}{2} \xrightarrow{0\leq\varphi_o<2\pi} \varphi_o=\frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Άρα:

$$\mathbf{x_2=3\eta\mu\left(\pi\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

ii) Πρόκειται για την σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, ίδιας συχνότητας που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Η σύνθετη ταλάντωσης θα είναι:

$$x=A\eta\mu(\omega t+\theta)$$

όπου:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1\cdot A_2\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow A=\sqrt{4^2+3^2+2\cdot4\cdot3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} \Rightarrow A=5\text{cm}$$

$$\text{και } \varepsilon\varphi\theta=\frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1+A_2\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta=\frac{3\cdot\eta\mu\frac{\pi}{2}}{4+3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta=\frac{3}{4} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{5}\text{rad}$$

άρα

$$\mathbf{x=5\eta\mu\left(\pi\cdot t+\frac{\pi}{5}\right)}$$

iii) $x=0 \Rightarrow \eta\mu5\eta\mu\left(\pi\cdot t+\frac{\pi}{5}\right)=\eta\mu0 \Rightarrow \pi\cdot t+\frac{\pi}{5}=\kappa\pi \Rightarrow \pi\cdot t=\kappa\pi-\frac{\pi}{5} \Rightarrow t=\frac{5\kappa-1}{5}$

Εφόσον ζητείται η χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται το σώμα από την Θ.Ι. για 2^{η} φορά φορά θέτουμε κ=2(για κ=0 είναι t<0, για 1^{η} φορά θα βάζαμε κ=1, οπότε για 2^{η} φορά θέτουμε κ=2).

Έτσι προκύπτει:

$$\mathbf{t=\frac{9}{5}=1{,}8s}$$

iv) $K+U=E \Rightarrow$

$$\frac{d(K+U)}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dK}{dt}+\frac{dU}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dU}{dt}=-\frac{dK}{dt}$$

Όμως:

$$\frac{dK}{dt}=\Sigma F\cdot u=-D\cdot x\cdot u$$

Βρίσκουμε την απομάκρυνση x και την ταχύτητα u την χρονική στιγμή t=5s:

$$x=5\eta\mu\left(\pi\cdot5+\frac{\pi}{5}\right)=5\cdot\eta\mu(\pi+\frac{\pi}{5})=-5\cdot\eta\mu\frac{\pi}{5}=-5\cdot\frac{3}{5}=-3\text{cm}=-3\cdot10^{-2}\text{m}$$

και

$$u=\pi\cdot 5\sigma\upsilon\nu\left(\pi\cdot 5+\frac{\pi}{5}\right)=5\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi+\frac{\pi}{5})=$$

$$=-5\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}=-5\pi\cdot\frac{4}{5}=-4\pi\ \text{cm/s}=-4\pi\cdot 10^{-2}\,m/s$$

Επίσης: $D=m\omega^2=1\cdot(\pi)^2=\pi^2=10$ N/m

Άρα: $\dfrac{dK}{dt}=-D\cdot x\cdot u=-10\cdot(-3\cdot 10^{-2})\cdot(-4\pi\cdot 10^{-2})=-12\pi\cdot 10^{-3}$ J/s

Οπότε:

$$\frac{dU}{dt}=-\frac{dK}{dt}\Rightarrow\mathbf{\frac{dU}{dt}=+12\pi\cdot 10^{-3}\,J/s}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Πέτρος Καραπέτρος