

Σύνθεση ταλαντώσεων και περιστρεφόμενα διανύσματα.

Ένα σώμα μάζας 2kg ταλαντώνεται με εξίσωση:

$$y = (2 + 2\sqrt{3}) \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi t) + 2\sqrt{6}\eta\mu(4\pi t - \frac{\pi}{4}) \text{ (cm)}$$

- i) Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σώματος είναι γραμμική αρμονική συνάρτηση του χρόνου (ΓΑΤ) και να υπολογίσετε το πλάτος και την αρχική της φάση.
- ii) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1=0,5s$.

Απάντηση:

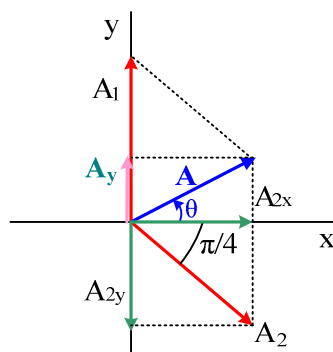
- i) Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κίνηση του σώματος συντίθεται από δύο γραμμικές αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις:

$$y_1 = (2 + 2\sqrt{3}) \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi t) = (2 + 2\sqrt{3}) \cdot \eta\mu(4\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (cm)}$$

και

$$y_2 = 2\sqrt{6} \cdot \eta\mu(4\pi t - \frac{\pi}{4}) \text{ (cm)}$$

Παίρνουμε δύο περιστρεφόμενα διανύσματα το πρώτο με μήκος $(2 + 2\sqrt{3})$ 4cm και το δεύτερο με μήκος $2\sqrt{6}$ cm, που στρέφονται με γωνιακή ταχύτητα $\omega=4\pi$ rad/s. Η προβολή τους στον άξονα y, θα μας δίνει κάθε στιγμή τις αντίστοιχες απομακρύνσεις y_1 και y_2 . Έστω ότι σχεδιάζουμε τα διανύσματα για $t=0$. Θα πάρουμε την παρακάτω εικόνα.



Καθώς τα διανύσματα A_1 και A_2 στρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο στρέφεται χωρίς να μετασχηματίζεται, συνεπώς και η συνισταμένη A αυτών των διανυσμάτων, θα στρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα και κάθε στιγμή η προβολή του στον κατακόρυφο άξονα θα είναι ίση με $y=y_1+y_2$. Αλλά:

Αν αναλύσουμε το διάνυσμα A_2 σε συνιστώσες πάνω στους άξονες x και y θα πάρουμε:

$$A_{2x} = A_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\pi/4 = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm} = 2\sqrt{3} \text{ cm και}$$

$$A_{2y} = A_2 \cdot \eta\mu\pi/4 = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Έτσι έχουμε:

$$A_y = A_1 - A_{2y} = (2 + 2\sqrt{3}) \text{ cm} - 2\sqrt{3} \text{ cm} = 2 \text{ cm και}$$

$$A_x = A_{2x} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Και από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot 3 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

Ενώ για τη γωνία που σχηματίζει το πλάτος A με τον άξονα x θα είναι:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Συνεπώς η εξίσωση της κίνησης του σώματος μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη εξίσωση:

$$y = 4 \cdot \eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}$$

ii) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος είναι:

$$\frac{dP}{dt} = F = ma = m(-A\omega^2 \cdot \eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right))$$

και με αντικατάσταση:

$$\frac{dP}{dt} = -6,4 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$$

Σχόλιο:

Η αρχική εξίσωση θα μπορούσε προφανώς να πάρει και άλλες ισοδύναμες μορφές, όπως ας πούμε:

$$y = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi t) + 2\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sqrt{6} \eta\mu\left(4\pi t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ (cm)}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης