Σύνθετη ταλάντωση και περιστρεφόμενα διανύσματα.

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, της οποίας η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι x=$0{,}2\sqrt{2}\eta\mu\left(\omega t+\frac{5\pi}{12}\right)(S.I.)$ και προκύπτει από την επαλληλία των εξισώσεων απομάκρυνσης δύο άλλων απλών αρμονικών ταλαντώσεων $x_1=0{,}2\eta\mu\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)(S.I.)$ και $x_2=A_2\eta\mu(\omega t+\varphi_{o,2})(S.I.)$. Η δυναμική ενέργεια του σώματος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του μηδενίζεται κάθε 0,1π s.

α) Να υπολογιστεί η περίοδος ταλάντωσης

β) Να βρεθεί η εξίσωση απομάκρυνσης $x_2=f(t)$

γ) Να βρεθεί η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη στιγμή $t_1=0{,}2\pi$ s.

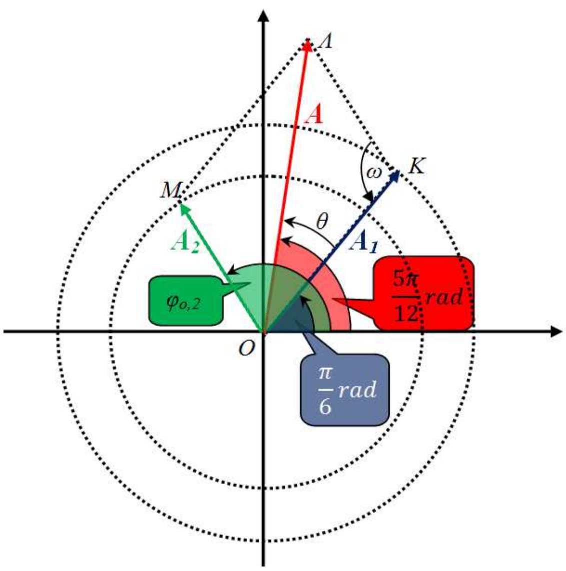
δ) Να βρεθεί πόσες φορές μεγιστοποιείται η κινητική ενέργεια του σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή 0,5π s.

Λύση:

α) Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης μηδενίζεται κάθε φορά που το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του. Το χρονικό διάστημα δύο διαδοχικών διελεύσεων από τη Θ.Ι. είναι T/2, άρα

$$\frac{T}{2}=0{,}1\pi\Rightarrow\boxed{T=0{,}2\pi\ s}$$

β) Η μελέτη της σύνθεσης των δύο ταλαντώσεων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των περιστρεφόμενων διανυσμάτων . Θεωρούμε δύο διανύσματα με μήκος ίσο με το πλάτος των ταλαντώσεων $x_1=f(t)$ και $x_2=f(t)$. Το άθροισμα των δύο διανυσμάτων έχει μήκος ίσο με το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης. Επειδή η $x_1=f(t)$ έχει αρχική φάση, το $\vec{A}_1$ σχηματίζει με τον οριζόντιο θετικό ημιάξονα την χρονική στιγμή t=0 γωνία $\frac{\pi}{6}rad$, ενώ το διάνυσμα $\vec{A}$ που αντιστοιχεί στην σύνθετη ταλάντωση σχηματίζει γωνία $\frac{5\pi}{12}rad$. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{A}_1$ *και* $\vec{A}$ είναι:



$$\theta=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{4}rad$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΚΛ έχουμε:

$$A_2^2=A^2+A_1^2-2A\cdot A_1\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow A_2^2=(0{,}2\sqrt{2})^2+0{,}2^2-2\cdot 0{,}2\sqrt{2}\cdot 0{,}2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow A_2^2 = 0{,}08 + 0{,}04 - 0{,}08 \Rightarrow \boxed{A_2 = 0{,}2m}$$

Επιπλέον, από τον νόμο των συνημιτόνων στο ίδιο τρίγωνο ως προς τη γωνία ω έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{A_1^2 + A_2^2 - A^2}{2 \cdot A_1 \cdot A_2} = \frac{0{,}2^2 + 0{,}2^2 - (0{,}2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2}rad$$

δηλαδή το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

Εάν Δφ η γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{A}_1$ και $\vec{A}_2$ τότε: $\Delta\varphi = \pi - \omega = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}rad$, διότι οι γωνίες που πρόσκεινται σε οποιαδήποτε πλευρά παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές.

Οπότε:$\varphi_{o,2} = \varphi_{o,1} + \Delta\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\varphi_{o,2} = \frac{2\pi}{3}rad}$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2\pi} = \frac{10rad}{s}$.

Έτσι, η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της $x_2=f(t)$ είναι:

$$x_2=A_2\eta\mu(\omega t+\varphi_{o,2}) \Rightarrow \boxed{x_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

γ) Παρατηρούμε ότι αντικαθιστώντας την χρονική στιγμή $t_1=0{,}2\pi$ s στην εξίσωση απομάκρυνσης x=f(t) δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την απομάκρυνση.

$$x = 0{,}2\sqrt{2}\eta\mu\left(10 \cdot 0{,}2\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = 0{,}2\sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{5\pi}{12}\right) =;;;$$

Στην περίπτωση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας για τον υπολογισμό της απομάκρυνσης

$$x=x_1+x_2$$

Για $t_1=0{,}2\pi$ s:

$$x_1 = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(10 \cdot 0{,}2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = +0{,}1m$$

και

$$x_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(10 \cdot 0{,}2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = 0{,}2 \cdot \left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = +0{,}1\sqrt{3}m$$

Άρα:

$$\boxed{x = 0{,}1\left(\sqrt{3} + 1\right)m}$$

δ) Η ταχύτητα του σώματος και κατ' επέκταση η κινητική του ενέργεια μεγιστοποιείται (κατά μέτρο) κάθε φορά που το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του x=0. Οπότε:

$$0=0,2\sqrt{2}\eta\mu\left(10t+\frac{5\pi}{12}\right)\Rightarrow\eta\mu\left(10t+\frac{5\pi}{12}\right)=0\Rightarrow 10t+\frac{5\pi}{12}=\kappa\pi\Rightarrow t=\frac{12\kappa\pi-5\pi}{120},\kappa\in Z^{+}$$

Πρέπει:

$$0\leq\frac{12\kappa\pi-5\pi}{120}\leq 0,5\pi\Rightarrow 0\leq 12\kappa\pi-5\pi\leq 60\pi\Rightarrow 5\pi\leq 12\kappa\pi\leq 65\pi$$

$$\frac{5}{12}\leq\kappa\leq\frac{65}{12}\Rightarrow\kappa=1,2,3,4,5$$

Άρα, η κινητική ενέργεια μεγιστοποιείται πέντε φορές.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Πέτρος Καραπέτρος