Η Σύνθεση ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης και οι εκδοχές της.

Α. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυνσή του περιγράφεται από την εξίσωση $x(t)=Aημ(20t+θ)$ (S.I) με $0 < θ < π$. Η εξίσωση x(t) μπορεί να αναλυθεί στις εξισώσεις δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων $x_1(t)=A_1ημ(20t+φ)$ (S.I) με $0 < φ < π$ και $x_2(t)=0{,}2ημ20t$ (S.I), οι οποίες γίνονται στην ίδια διεύθυνση, έχουν την ίδια θέση ισορροπίας και την ίδια συχνότητα. Η ενέργεια Ε της ταλάντωσης με εξίσωση απομάκρυνσης x(t) είναι ίση με την ενέργεια E_1 της ταλάντωσης με εξίσωση απομάκρυνσης $x_1(t)$.Όταν το σώμα εκτελεί την ταλάντωση x(t), τη χρονική στιγμή t=0 έχει απομάκρυνση $x= 0{,}1\sqrt{3}$ m και ταχύτητα μέτρου 2m/s.

Α₁. Να υπολογίσετε το πλάτος A_1 της ταλάντωσης με εξίσωση απομάκρυνσης $x_1(t)$.

Α₂. Να γραφούν οι εξισώσεις x(t) και $x_1(t)$.

Β. Θεωρούμε ότι οι εξισώσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι οι εξισώσεις δύο αρμονικών ταλαντώσεων. Αυξάνουμε την τιμή της γωνιακής συχνότητας της ταλάντωσης με εξίσωση απομάκρυνσης $x_2(t)$ κατά 10% και διατηρούμε τις ίδιες συνθήκες ταλάντωσης για την ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $x_1(t)$.Οι δύο ταλαντώσεις πραγματοποιούνται στην ίδια διεύθυνση και έχουν την ίδια θέση ισορροπίας.

Β₁. Να γράψετε την εξίσωση κίνησης του σώματος $x'(t)$ που προκύπτει από την σύνθεση των εξισώσεων $x_1(t)$ και $x_2(t)$.Στην εξίσωση $x'(t)$ να υποδείξετε έναν όρο που διαμορφώνει τα όρια για τις τιμές της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του και να συμβολίσετε την απόλυτη τιμή του ως $|A'|$.

Β₂. Να υπολογίσετε το πλήθος των μεγιστοποιήσεων του όρου $|A'|$, σε χρόνο t=20T,όπου Τ η περίοδος της ταλάντωσης με εξίσωση απομάκρυνσης x(t).

Απάντηση:

Α₁. Η ενέργεια της ταλάντωσης με εξίσωση x(t) διατηρείται :

$$E=U+K \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mυ^2$$

$$\Rightarrow mω^2A^2 = mω^2x^2 + mυ^2 \Rightarrow A = \sqrt{x^2 + \frac{υ^2}{ω^2}} \Rightarrow A = 0{,}2m \quad (1)$$

$$\text{Επειδή } E=E_1 \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 \Rightarrow A=A_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} A_1=A_2=A=0{,}2m \quad (2)$$

Α₂. Τα πλάτη A, A_1, A_2 των ταλαντώσεων με εξισώσεις αντίστοιχα $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ συνδέονται με τη σχέση:

$$A=\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ} \Rightarrow A^2=A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} 0 = A_2(A_2 + 2A_1\sigma\upsilon\nu\varphi) \\ \mu\varepsilon\ A_2 \neq 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow (A_2 + 2A_1\sigma\upsilon\nu\varphi) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{1}{2}.$$

Αλλά 0<φ<π , άρα $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ rad. (3)

Όπου φ, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων με εξισώσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$.

$$\text{Επομένως } x_1(t) = 0{,}2\eta\mu(20t + \frac{2\pi}{3})\ (S.I).\ (4)$$

Αν θ είναι η διαφορά φάσης της ταλάντωσης της ταλάντωσης με εξίσωση x(t) (και αρχική φάση της x(t)) με την ταλάντωση $x_2(t)$, τότε $\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_1\eta\mu\varphi}{A_2 + A_1\sigma\upsilon\nu\varphi} \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} \varepsilon\varphi\theta = \sqrt{3}$, αλλά 0<θ<π, άρα $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad.(5)

Επομένως από τις (2) και (5) :

$$x(t) = 0{,}2\ \eta\mu(20t + \frac{\pi}{3})\ \ (S.I).\ \ (6)$$

B₁. Η γωνιακή ταχύτητα της ταλάντωσης $x_2(t)$ γίνεται $\omega_2 = \omega + \frac{20\omega}{100} \Rightarrow \omega_2 = 22$ rad/s.

$$x' = x_1 + x_2 \Rightarrow x' = 0{,}2\ \eta\mu\ (20t + \frac{2\pi}{3}) + 0{,}2\eta\mu 22t \Rightarrow x' = 0{,}4\ \sigma\upsilon\nu(t - \frac{\pi}{3})\ \eta\mu(21t + \frac{\pi}{3})\ \ (S.I)$$

Ο όρος $A' = 0{,}4\ \sigma\upsilon\nu(t - \frac{\pi}{3})$ μεταβάλλεται χρονικά πολύ πιο αργά σε σχέση με τον όρο $\eta\mu(21t + \frac{\pi}{3})$ και διαμορφώνει τις τιμές των ορίων της απομάκρυνσης της σύνθετης κίνησης.

$$\text{Θέτουμε } |A'| = \left|0{,}4\ \sigma\upsilon\nu(t - \frac{\pi}{3})\right|.$$

B₂ Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων της τιμής του παράγοντα $|A'|$ (διακροτήματα) είναι $T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} = \frac{2\pi}{|\omega - \omega_2|} = \pi$ s (13).Το πλήθος των μεγιστοποιήσεων N σε χρόνο t=20T είναι:

$$N = \frac{20T}{T_\delta} \overset{(13)}{\Rightarrow} N = \frac{20\frac{\pi}{10}}{\pi} \Rightarrow N = 2.$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ξ. Στεργιάδης