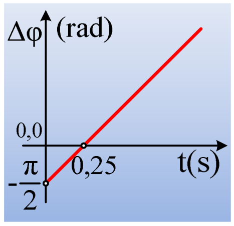
Διαφορά φάσης σε ήχους με διαφορετικές συχνότητες.

Διαθέτουμε δύο ηχητικές πηγές που παράγουν απλούς αρμονικούς ήχους με παραπλήσιες συχνότητες f_1 και f_2. Έστω ότι η ταλάντωση του τυμπάνου εξαιτίας του πρώτου ήχου έχει απομάκρυνση:

$$x_1 = 0{,}003 \cdot \eta\mu(2\pi f_1 t + \varphi_0) \text{ (S.I.) με } \varphi_0 \geq 0.$$

ενώ εξαιτίας του δεύτερου ήχου:

$$x_2 = 0{,}003 \cdot \eta\mu(2\pi f_2 t) \text{ (S.I.).}$$



Έστω ότι κάποια στιγμή ηχούν ταυτόχρονα και οι δύο ηχητικές πηγές, οπότε το τύμπανο εκτελεί σύνθετη ταλάντωση. Η διπλανή γραφική παράσταση εμφανίζει τη διαφορά φάσης μεταξύ των φάσεων της απομάκρυνσης των δύο ταλαντώσεων σε συνάρτηση με το χρόνο.

i) Ποιος ήχος έχει μεγαλύτερη συχνότητα;

ii) Να βρεθεί η συχνότητα του διακροτήματος.

iii) Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης του τυμπάνου τη χρονική στιγμή t_1=0,25s;

iv) Να υπολογιστεί επίσης το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_2=3,75s.

v) Αν το τύμπανο του αυτιού μας εκτελέσει 410 ταλαντώσεις σε χρονικό διάστημα 4s, να βρεθεί η απομάκρυνση τη στιγμή t_1.

Απάντηση:

i) Η διαφορά φάσης τη στιγμή t=0 είναι αρνητική και ίση με $-\frac{\pi}{2}$, συνεπώς $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ και η διαφορά φάσης, μεταξύ των φάσεων των δύο απομακρύνσεων, θα υπολογίζεται σαν η διαφορά:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi f_2 t - 2\pi f_1 t - \frac{\pi}{2} = 2\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Αλλά από την γραφική παράσταση που μας δίνεται, βλέπουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι θετικός (θετική κλίση της ευθείας ή ισοδύναμα αύξουσα συνάρτηση), συνεπώς :

$$2\pi(f_2 - f_1) > 0 \rightarrow f_2 > f_1.$$

ii) Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) t=0,25s και Δφ=0, παίρνουμε:

$$2\pi(f_2 - f_1) \cdot 0{,}25 - \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow$$

$$f_2 - f_1 = 1Hz \rightarrow f_\delta = 1Hz$$

iii) Τη στιγμή t_1 οι δύο ταλαντώσεις δεν παρουσιάζουν διαφορά φάσης συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης είναι μέγιστο: 2A=0,006m. Ας το δούμε και αναλυτικά:

Με βάση την αρχή της επαλληλίας έχουμε:

$$x = x_1 + x_2 = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{2}}{2}\cdot\eta\mu\frac{2\pi(f_2 + f_1)t + \frac{\pi}{2}}{2} \rightarrow$$

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\eta\mu\left(\pi(f_2 + f_1)t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2)$$

Αλλά για το πλάτος έχουμε:

$$A' = \left|2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\cdot 1\cdot 0{,}25 - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu 0 = 2A$$

iv) Όμοια για την στιγμή t_2 παίρνουμε $\Delta\varphi = 2\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{2} = 2\pi\cdot 1\cdot 3{,}75 - \frac{\pi}{2} = 7\pi$ rad

Δηλαδή η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων, είναι περιττό πολλαπλάσιο του π, πράγμα που σημαίνει ότι αν η απομάκρυνση εξαιτίας της μιας ταλάντωσης είναι +x, εξαιτίας της άλλης θα είναι –x, συνεπώς η απομάκρυνση θα είναι μηδενική. Θα μπορούσαμε βέβαια να βρούμε το πλάτος και από την εξίσωση:

$$A'' = \left|2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\cdot 1\cdot 3{,}75 - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu 3{,}5\pi = 0$$

v) Με βάση και την εξίσωση (2) έχουμε ότι η συχνότητα της κίνησης είναι $\bar{f} = \frac{f_2 + f_1}{2}$ αλλά

$$N = \bar{f}t \rightarrow \bar{f} = \frac{N}{t} = \frac{410}{4}Hz = 102{,}5Hz \rightarrow \frac{f_2 + f_1}{2} = 102{,}5Hz \rightarrow$$

$f_2 + f_1 = 205$ ενώ $f_2 - f_1 = 1$, από όπου βρίσκουμε $f_2 = 103Hz$, $f_1 = 102Hz$

Οπότε τη στιγμή t_1 έχουμε:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\eta\mu\left(\pi(f_2 + f_1)t + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}006\cdot\eta\mu\left(205\pi\cdot\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$$

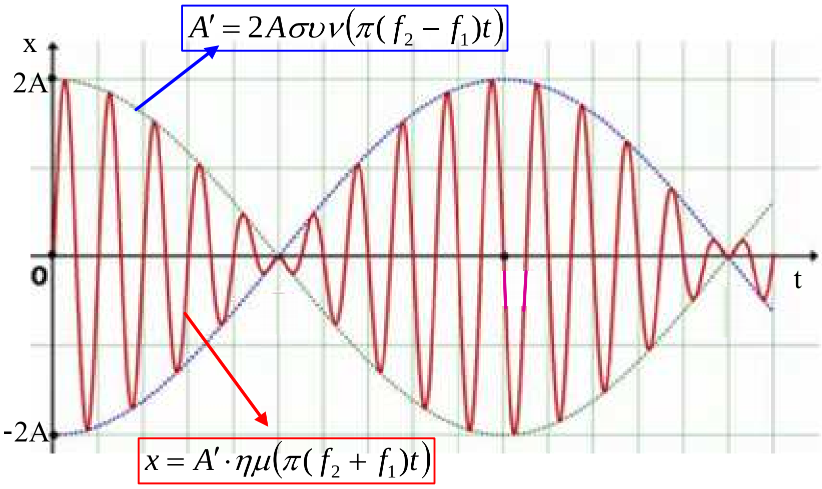
$$x = 0{,}006\cdot\eta\mu\left(\frac{206\pi}{4}\right) = 0{,}006\cdot\eta\mu\left(51\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}006m$$

Σχόλιο.

Στα προηγούμενα ονομάζαμε πλάτος της ταλάντωσης (σύμφωνα **και** με το σχολικό μας βιβλίο) την τιμή της παράστασης:

$$A' = \left|2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Στην πραγματικότητα η συνάρτηση $A' = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4}\right)$ ορίζει την περιβάλλουσα της απομάκρυνσης, όπως μπορούμε να δούμε στο παρακάτω διάγραμμα.



Συνεπώς θα μπορούσε το μέγιστο «πλάτος» να υπολογίζεται στην τιμή 2Α, αλλά η μέγιστη τιμή της απομάκρυνσης x, να μην ήταν ποτέ 2Α, αλλά μικρότερη, όπως μπορεί να φανεί στο παραπάνω σχήμα.

Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στην παραπάνω άσκηση, όπου όπως υπολογίστηκε τις στιγμές μεγιστοποίησης του «πλάτους» $A' = \left|2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4}\right)\right|$ η απομάκρυνση παίρνει τιμή ± 2Α.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης