Άλλη μια σύνθεση ταλαντώσεων.

Ένα σώμα μάζας 2kg κινείται με εξίσωση κίνησης:

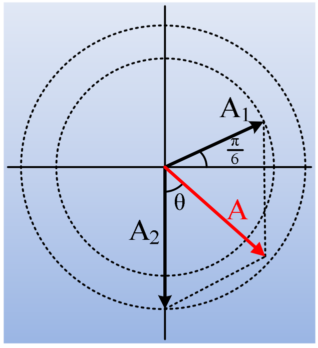
$$x = 0{,}3\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) + 0{,}4\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

i) Να αποδειχθεί ότι η κίνηση του σώματος είναι μια αρμονική ταλάντωση.

ii) Αν η παραπάνω ταλάντωση είναι όχι μόνο αρμονική αλλά και ΑΑΤ, να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης.

iii) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης τη στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση x_1=0,2m.

Απάντηση:



i) Παρατηρώντας την εξίσωση που μας δίνεται, μπορούμε να πούμε ότι έχουμε σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας διεύθυνσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με την ίδια γωνιακή συχνότητα (ω=10rad/s) και με διαφορά φάσης Δφ=$10t + \frac{3\pi}{2} - 10t - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} rad$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις του βιβλίου, αλλά ας δοκιμάσουμε χρησιμοποιώντας τα περιστρεφόμενα διανύσματος, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου έχουμε σχεδιάσει τα διανύσματα A_1=0,3m και A_2=0,4m τη χρονική στιγμή t=0.

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2 + 2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}m = \sqrt{0{,}13}m$$

$$\text{Ενώ } \varepsilon\varphi\vartheta = \frac{A_1\eta\mu\frac{2\pi}{3}}{A_2 + A_1\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}} = \frac{0{,}3\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}4 + 0{,}3\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

Συνεπώς η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$x = \sqrt{0{,}13}\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2} + \vartheta\right)$$

Όπου για την γωνία θ ισχύει $\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{3\sqrt{3}}{5}$.

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι η κίνηση είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.

ii) Από την στιγμή που η ταλάντωση είναι ΑΑΤ, έχει ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_T = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}2\cdot 10^2\cdot\left(\sqrt{0{,}13}\right)^2 J = 13J$$

iii) Από την διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$$E_T = K + U \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \rightarrow$$

$$|\upsilon| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 10\sqrt{\left(\sqrt{0{,}13}\right)^2 - (0{,}2)^2}\, m/s = 3m/s$$

Συνεπώς η ταχύτητα του σώματος θα έχει τιμή $\upsilon = \pm 3m/s$

Έτσι για τους ζητούμενους ρυθμούς έχουμε:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F} \rightarrow$$

$$\frac{dP}{dt} = -Dx = -m\omega^2 x = -2\cdot 10^2 \cdot 0{,}2 kg\cdot m/s^2 = -40 kg\cdot m/s^2$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F\varepsilon\pi}}{dt} = -\frac{|F||dx|\sigma\upsilon\nu a}{dt} = -|m\omega^2 x||\upsilon|\sigma\upsilon\nu a$$

Όπου α η γωνία μεταξύ της δύναμης επαναφοράς F=-Dx=-mω^{2}x=-40N, με φορά προς την θέση ισορροπίας και της ταχύτητας του σώματος. Αλλά τότε έχουμε δύο περιπτώσεις:

α) Αν υ=3m/s: $\frac{dU}{dt} = -|m\omega^2 x||\upsilon|\sigma\upsilon\nu 180^o = 2\cdot 10^2 \cdot 0{,}2\cdot 3 J/s = 120 J/s$

β) Αν υ=-3m/s: $\frac{dU}{dt} = -|m\omega^2 x||\upsilon|\sigma\upsilon\nu 0^o = -2\cdot 10^2 \cdot 0{,}2\cdot 3 J/s = -120 J/s$

Σχόλιο:

1) Η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ταλαντώσεων βρέθηκε ίση με Δφ=$\frac{4\pi}{3} rad$, αλλά με βάση τα περιστρεφόμενα διανύσματα, εμείς χρησιμοποιήσαμε την γωνία 2π-Δφ = $\frac{2\pi}{3} rad$, η οποία είναι μικρότερη από π, με αποτέλεσμα να σχηματίζεται παραλληλόγραμμο, όπως στο σχήμα.

2) Η εξίσωση που βρήκαμε $x = \sqrt{0{,}13}\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2} + \vartheta\right)$, περιγράφει μια αρμονική ταλάντωση, αλλά όχι υποχρεωτικά ΑΑΤ. Θα μπορούσε να ήταν και μια εξαναγκασμένη. Αλλά τότε δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την διατήρηση της ενέργειας και θα είμαστε υποχρεωμένοι να εργαστούμε με τις χρονοεξισώσεις x-t, υ-t…

3) Οι αριθμητικές τιμές που επελέγησαν σαν δεδομένα, ήταν τέτοιες που να μην προκύπτουν «καλά» αποτελέσματα, όσον αφορά το πλάτος και τη διαφορά φάσης. Αυτό δεν πρέπει να μας κάνει να τρομάζουμε,

αφού τα αποτελέσματα μπορούν να υπολογιστούν, χωρίς χρήση υπολογιστικής μηχανής και χωρίς να γνωρίζουμε, ας πούμε, την γωνία που έχει εφαπτομένη $\frac{3\sqrt{3}}{5}$!!!

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης