Μια ιδιόμορφη ταλάντωση.

Υλικό σημείο Σ ενός ελαστικού μέσου εκτελεί περιοδική κίνηση (ιδιόμορφη ταλάντωση) της οποίας η εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση χ=0, εκφράζεται ως επαλληλία των εξισώσεων κίνησης:

$$x_1 = 0,1\eta\mu(202\pi t)(S.I) \text{ και } x_2 = 0,1\eta\mu(198\pi t)(S.I)$$

i) Να γραφεί η εξίσωση κίνησης του Σ
ii) Ποιες χρονικές στιγμές μηδενίζεται ο όρος της περιοδικής κίνησης που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο (περιβάλλουσα); Ποια χρονική στιγμή μηδενίζεται για πρώτη φορά; <u>Ποια η φάση των δύο εξισώσεων</u> χ_1, χ_2 <u>από την επαλληλία των οποίων προκύπτει η εξίσωση κίνησης του Σ</u>, ποια η διαφορά φάσης μεταξύ τους και ποιες οι τιμές των χ_1 , χ_2 και της απομάκρυνσης χ τη στιγμή αυτή;
iii) Ποιες χρονικές στιγμές γίνεται μέγιστος κατά απόλυτη τιμή ο όρος της περιοδικής κίνησης που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο (περιβάλλουσα); Ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό για πρώτη φορά; <u>Ποια η φάση των δύο εξισώσεων</u> χ_1 , χ_2 <u>από την επαλληλία των οποίων προκύπτει η εξίσωση κίνησης του Σ</u>, ποια η διαφορά φάσης μεταξύ τους και ποιες οι τιμές των χ_1 , χ_2 και της απομάκρυνσης χ τη στιγμή αυτή;
iv) Πόσες πλήρεις ταλαντώσεις της περιοδικής κίνησης εκτελεί το υλικό σημείο σε χρονικό διάστημα ίσο με αυτό που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της περιβάλλουσας;

Απάντηση:

Από την εξίσωση κίνησης $x_1 = 0,1\eta\mu(202\pi t)(S.I)$ έχουμε ότι:

$$\omega_1 = 202\pi \frac{rad}{s} \text{ και } f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \Leftrightarrow f_1 = 101Hz$$

ενώ από την εξίσωση κίνησης $x_2 = 0,1\eta\mu(198\pi t)(S.I)$ έχουμε ότι:

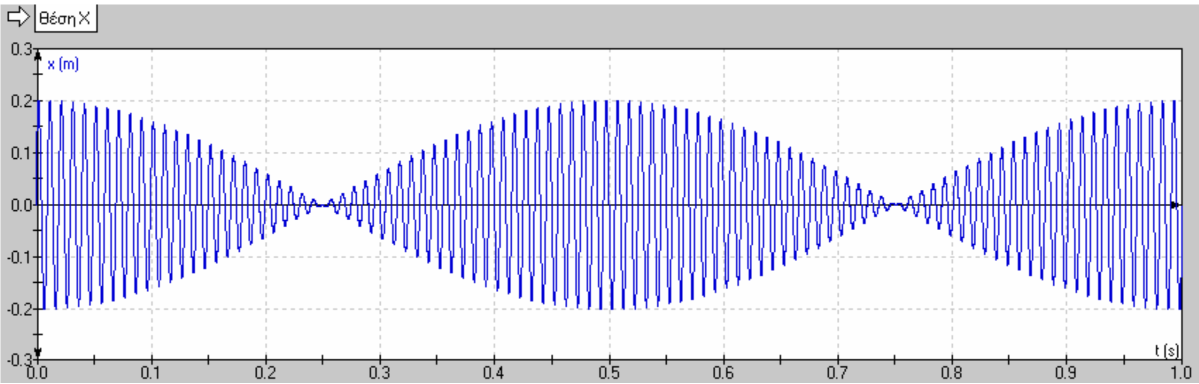
$$\omega_2 = 198\pi \frac{rad}{s} \text{ και } f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \Leftrightarrow f_2 = 99Hz$$

i) Η εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση χ=0, της ιδιόμορφης ταλάντωσης, προκύπτει από την επαλληλία των εξισώσεων κίνησης

$$x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow x = 0,1\eta\mu(202\pi t) + 0,1\eta\mu(198\pi t) \Leftrightarrow x = 0,2\sigma\upsilon\nu(2\pi t)\eta\mu(200\pi t)(S.I) \quad (1)$$

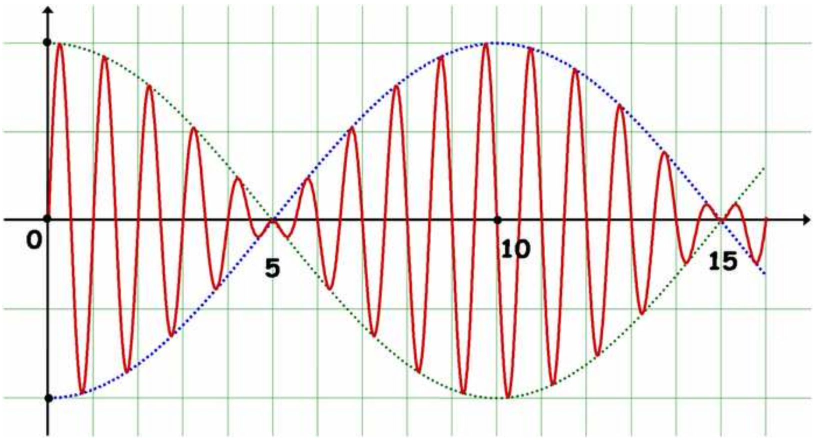
Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί: $x = A'\eta\mu\overline{\omega}t$ όπου $A' = 0,2\sigma\upsilon\nu(2\pi t)(S.I)$ (2)

ο όρος της περιοδικής κίνησης που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο και αντιστοιχεί στην περιβάλλουσα της γραφικής παράστασης της (1) και $\overline{\omega} = 200\pi$ rad/s η γωνιακή συχνότητα της ιδιόμορφης ταλάντωσης.



Για να δούμε τι ακριβώς συμβαίνει ας δούμε ένα παρόμοιο παράδειγμα με άλλες τιμές:

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η ιδιόμορφη ταλάντωση που εκτελεί υλικό σημείο, της οποίας η απομάκρυνση από τη θέση χ=0 προκύπτει από την επαλληλία δύο εξισώσεων κίνησης: χ_1 =Αημ(2,1πt) με f_1 =1,05 Hz και χ_2 =Αημ(1,9πt) με f_2 =0,95 Hz.



Η ιδιόμορφη ταλάντωση (κόκκινη γραμμή) έχει ως εξίσωση κίνησης τη:

X=2Ασυν(0,1πt)ημ(2πt), t σε sec

Η περιβάλλουσα τη γραφική παράσταση (πράσινη γραμμή) έχει εξίσωση:

$$A' = 2A\sigma\upsilon\nu(0{,}1\pi t)\quad .$$

ii) $A' = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = 0 = \sigma\upsilon\nu(2\kappa+1)\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\pi t = (2\kappa+1)\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \dfrac{2\kappa+1}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}^+$ (3)

Μηδενίζεται για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή που προκύπτει αν στην (3) θέσουμε κ=0:

$$(3) \Rightarrow t = \frac{1}{4}s$$

Οι φάσεις των δύο εξισώσεων χ_1 , χ_2 από την επαλληλία των οποίων προκύπτει η εξίσωση κίνησης του Σ την ίδια στιγμή είναι:

$$\varphi_1 = 202\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{101\pi}{2} = 50\pi + \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \text{και}$$

$$\varphi_2 = 198\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{99\pi}{2} = 48\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

Η διαφορά φάσης είναι: $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad.

Οι τιμές των χ_1, χ_2 τη στιγμή αυτή τη στιγμή αυτή είναι:

$$x_1 = 0{,}1\eta\mu(50\pi + \frac{\pi}{2}) = 0{,}1m \quad \text{και} \quad x_2 = 0{,}1\eta\mu(48\pi + \frac{3\pi}{2}) = -0{,}1m$$

από την επαλληλία των οποίων προκύπτει: $x = x_1 + x_2 = 0$.

Προφανώς όταν Α΄=0, την ίδια στιγμή $x = A'\eta\mu(\omega' t) = 0$.

(Στο παραπάνω διάγραμμα αυτό φαίνεται τις χρονικές στιγμές t=5s και t=15s)

iii) $A' = 0{,}2m \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = 1 = \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi) \Leftrightarrow 2\pi t = 2\kappa\pi \Leftrightarrow t = \kappa, \kappa \in \mathbb{Z}^+$ (4)

Αυτό συμβαίνει για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή που προκύπτει αν στην (4) θέσουμε κ=0:

$$(4) \Rightarrow t = 0$$

Οι φάσεις των δύο εξισώσεων χ_1, χ_2 από την επαλληλία των οποίων προκύπτει η εξίσωση κίνησης του Σ την ίδια στιγμή είναι:

$$\varphi_1 = 0 \text{ rad} \quad \text{και} \quad \varphi_2 = 0 \text{ rad}$$

Η διαφορά φάσης είναι: $\Delta\varphi = 0$ rad.

Οι τιμές των χ_1, χ_2 τη στιγμή αυτή τη στιγμή αυτή είναι:

$$x_1 = 0{,}1\eta\mu 0 = 0 \quad \text{και} \quad x_2 = 0{,}1\eta\mu 0 = 0$$

από την επαλληλία των οποίων προκύπτει: $x = x_1 + x_2 = 0$.

Ισοδύναμα: $x = 0{,}2\eta\mu 0 = 0$

Βλέπουμε δηλαδή πως όταν Α΄=0,2m, την ίδια στιγμή $x = x_1 + x_2 \neq 0{,}2m$, αλλά χ=0 (κάτι ανάλογο συμβαίνει και με την περιβάλλουσα της ιδιόμορφης ταλάντωσης την χρονική στιγμή t=0, όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα)

Επίσης:

$$A' = -0,2m \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = -1 = \sigma\upsilon\nu(2\kappa+1)\pi \Leftrightarrow 2\pi t = (2\kappa+1)\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\kappa+1}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}^+ \quad (5)$$

Αυτό συμβαίνει για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή που προκύπτει αν στην (5) θέσουμε κ=0:

$$(5) \Rightarrow t = \frac{1}{2}s$$

Οι φάσεις των δύο εξισώσεων χ_1, χ_2 από την επαλληλία των οποίων προκύπτει η εξίσωση κίνησης του Σ την ίδια στιγμή είναι:

$$\varphi_1 = 202\pi \cdot \frac{1}{2} = 101\pi \text{ rad} \quad \text{και} \quad \varphi_2 = 198\pi \cdot \frac{1}{2} = 99\pi \text{ rad}$$

Η διαφορά φάσης είναι: $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi$ rad.

Οι τιμές των χ_1, χ_2 τη στιγμή αυτή είναι:

$$x_1 = 0,1\eta\mu(101\pi) = 0 \quad \text{και} \quad x_2 = 0,1\eta\mu(99\pi) = 0$$

από την επαλληλία των οποίων προκύπτει: $x = x_1 + x_2 = 0$.

Ισοδύναμα: $x = -0,2\eta\mu(100\pi) = 0$

Βλέπουμε δηλαδή πως όταν Α΄=-0,2m, την ίδια στιγμή $x = x_1 + x_2 \neq -0,2m$, αλλά χ=0 (κάτι ανάλογο συμβαίνει και με την περιβάλλουσα της ιδιόμορφης ταλάντωσης την χρονική στιγμή t=10s, όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα)

iv) Η δεύτερη χρονική στιγμή που μηδενίζεται η περιβάλλουσα, δηλαδή Α΄=0, προκύπτει από την (3) θέτοντας κ=1:

$$(3) \Rightarrow t = \frac{2\cdot 1+1}{4} = \frac{3}{4}s$$

Την ίδια στιγμή: $\varphi_1 = 202\pi \cdot \frac{3}{4} = 151,5\pi = 150\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_1 = -0,1m$ και

$$\varphi_2 = 198\pi \cdot \frac{3}{4} = 148,5\pi = 148\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 = 0,1m$$

Άρα: $x = x_1 + x_2 = 0$

Συμπεραίνουμε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της περιβάλλουσας Α΄ εκτελείται ακέραιος αριθμός ταλαντώσεων της ιδιόμορφης ταλάντωσης. Ο αριθμός αυτός προκύπτει αν λάβουμε υπ’ όψη μας ότι μια τέτοια ταλάντωση πραγματοποιείται σε χρονικό διάστημα:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{200\pi} s \Leftrightarrow T = \frac{1}{100} s$$

ενώ μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της περιβάλλουσας Α΄ μεσολαβεί χρονικό διάστημα :

$$\Delta t = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} s.$$

Άρα: $N = \frac{\Delta t}{T} \Leftrightarrow N = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{100}} = 50$ ταλαντώσεις.

Ο αριθμός των ταλαντώσεων της ιδιόμορφης ταλάντωσης που εκτελούνται στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της περιβάλλουσας στο παραπάνω διάγραμμα, είναι:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Leftrightarrow N = \frac{10}{1} = 10$$

ταλαντώσεις, όπως εύκολα μπορεί να μετρηθούν.

Σχόλιο:

Η σχέση $x = 0,2\left|\sigma\upsilon\nu(2\pi t)\right|$ (S.I) <u>δεν είναι το πλάτος της ιδιόμορφης ταλάντωσης</u> $x = 0,2\sigma\upsilon\nu(2\pi t)\eta\mu(200\pi t)(S.I)$ αλλά μία από τις περιβάλλουσες της χ(t). Το υλικό σημείο Σ αν και αποκλείεται να βρεθεί σε μέγιστη απόσταση από τη θέση χ=0, μεγαλύτερη από 0,2m, <u>δε θα βρεθεί ποτέ σε απόσταση ίση με 0,2m</u>, παρά μόνο <u>ικανοποιητικά κοντά σε απόσταση 0,2m</u>.

Αυτό φαίνεται εύκολα ως εξής: Για να βρεθεί σε μέγιστη απόσταση από τη θέση χ=0 ίση με 0,2m <u>πρέπει οι όροι $\left|\sigma\upsilon\nu(2\pi t)\right|$ και ημ(200πt) να λάβουν ταυτόχρονα τιμή ίση με 1.</u> Αυτό όμως δε μπορεί να γίνει αφού τις χρονικές στιγμές όπου $\left|\sigma\upsilon\nu(2\pi t)\right| = 1$, δηλαδή τις $t = k$ και $t = \frac{2k+1}{2}$ όπου $k \in Z^{+}$, ισχύει:

$$\eta\mu(200\pi k) = 0 \quad \text{και} \quad \eta\mu(200\pi \frac{2k+1}{2}) = \eta\mu(200\pi k + 100\pi) = 0.$$

Άρα τις χρονικές στιγμές όπου $\left|A'\right| = 0,2m$ θα είναι χ=0.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασγουρίδης