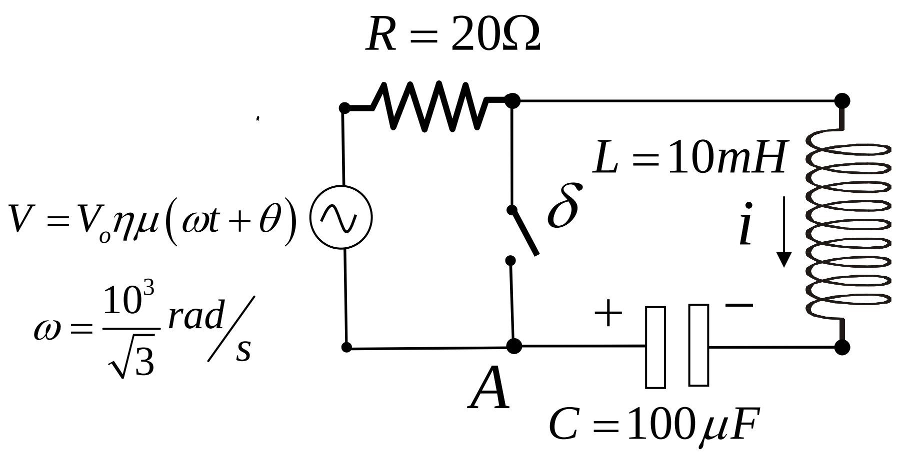
Ηλεκτρική ταλάντωση αρχικά εξαναγκασμένη, κατόπιν ελεύθερη.

Αρχικά ο διακόπτης δ είναι ανοικτός και το κύκλωμα εκτελεί εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω. Το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή είναι 200 μC.



Κάποια στιγμή όπου το φορτίο και το ρεύμα είναι όπως στο σχήμα κλείνει ο διακόπτης.

Το φορτίο στον πυκνωτή είναι την στιγμή αυτήν 100 μC. Η χρονική στιγμή αυτή θα εκληφθεί στη συνέχεια ως μηδέν και ως οπλισμός αναφοράς ο Α. (Το φορτίο θα χαρακτηρίζεται θετικό αν ο Α έχει θετικό φορτίο και το ρεύμα θετικό αν η συμβατική φορά κατευθύνεται προς τον Α).

i) Βρείτε την αλγεβρική τιμή του ρεύματος τη στιγμή μηδέν.

ii) Βρείτε την ίδια στιγμή τους ρυθμούς μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας στον πυκνωτή και τον ρυθμό παραγωγής θερμότητας στον αντιστάτη.

iii) Μετά το κλείσιμο του διακόπτη γράψτε τις εξισώσεις του φορτίου και του ρεύματος.

iv) Τη στιγμή του κλεισίματος του διακόπτη βρείτε τους ρυθμούς μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας στον πυκνωτή και της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.

v) Να παρασταθεί γραφικά το φορτίο συναρτήσει του χρόνου. Να απεικονίζεται και το παρελθόν.

Απάντηση:

i) Σε κάθε ηλεκτρική ταλάντωση ισχύει ότι $i^2 = \omega^2\left(Q_{\alpha\rho\chi}^2 - q^2\right)$ άσχετα αν είναι εξαναγκασμένη ή όχι.

Εδώ δεν επικαλούμαστε τη διατήρηση της ενέργειας λόγω του ότι προσφέρεται ενέργεια από την πηγή. Όμως:

$$q = Q_{\alpha\rho\chi}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \omega^2 q^2 = \omega^2 Q_{\alpha\rho\chi}^2 \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) \quad (1)$$

Επίσης

$$i = -I\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow i^2 = I^2\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow i^2 = \omega^2 Q_{\alpha\rho\chi}^2\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$\omega^2 q^2 + i^2 = \omega^2 Q_{\alpha\rho\chi}^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) + \omega^2 Q_{\alpha\rho\chi}^2\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow$$

$$\omega^2 q^2 + i^2 = \omega^2 Q_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow i^2 = \omega^2\left(Q_{\alpha\rho\chi}^2 - q^2\right)$$

$$\Rightarrow i^2 = \frac{10^6}{3}\left(4.10^{-8} - 10^{-8}\right)A^2 \Rightarrow i^2 = 10^{-2}A^2 \Rightarrow i = \pm 0{,}1A$$

Όμως το ρεύμα κατευθύνεται προς τον άλλο οπλισμό οπότε οδηγεί σε μείωση του φορτίου και χαρακτηρίζεται ως αρνητικό, δηλαδή $i = -0{,}1A$.

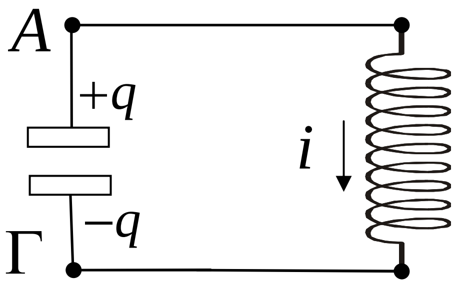
ii) Ο ρυθμός μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας στον πυκνωτή είναι

$$\frac{dU_E}{dt} = P_c = V_c.i = \frac{q.i}{C} = \frac{10^{-4}10^{-1}}{10^{-4}} J/s = 0{,}1\, J/s$$

Σημειώσατε ότι λόγω του ότι η ταλάντωση είναι εξαναγκασμένη και προσφέρεται ενέργεια από την πηγή δεν ισχύει το ότι $\frac{dU_E}{dt} = -\frac{dU_B}{dt}$

Ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας είναι:

$$P_{\theta\varepsilon\rho\mu} = i^2 R = 0{,}2\, J/s \,.$$



iii) Το κύκλωμα είναι το διπλανό και βλέπουμε ότι την στιγμή μηδέν $q > 0$ και $i < 0$.

Οι εξισώσεις είναι γενικώς:

$$q = Q\sigma\upsilon\nu\left(\omega_o t + \varphi_o\right) \text{ και } i = -I\eta\mu\left(\omega_o t + \varphi_o\right)$$

Η ω_o είναι η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος

Θα υπολογίσουμε τα Q και I από διατήρηση ενέργειας ή από τον τύπο που έχουμε ήδη αποδείξει τον

$$\omega^2 q^2 + i^2 = \omega^2 Q^2$$

$$\omega^2 q^2 + i^2 = \omega^2 Q^2 \Rightarrow Q^2 = q^2 + \frac{i^2}{\omega^2} = \left(10^{-8} + 10^{-8}\right)A^2 \Rightarrow Q = 10^{-4}\sqrt{2}C$$

$$I = Q.\omega = \left(10^{-4}\sqrt{2}\right)10^3 A = 10^{-1}\sqrt{2}A$$

Ας βρούμε και την αρχική φάση.

Τη στιγμή μηδέν:

$$q = 10^{-4} \Rightarrow 10^{-4}\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\varphi_o = 10^{-4} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{και } i < 0 \Rightarrow -I\eta\mu\left(\omega_o 0 + \varphi_o\right) < 0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_o > 0$$

Ψάχνουμε μια «γωνία» από 0 ως 2π με συνημίτονο $\frac{1}{\sqrt{2}}$ και ημίτονο θετικό. Μόνο μία ταιριάζει η $\varphi_o = \frac{\pi}{4}$.

Εν τέλει οι εξισώσεις είναι:

$$q = 10^{-4}\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(S.I)}$$

$$i=-0{,}1\sqrt{2}\eta\mu\left(1000t+\frac{\pi}{4}\right)\qquad \text{(S.I)}$$

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας στον πυκνωτή είναι:

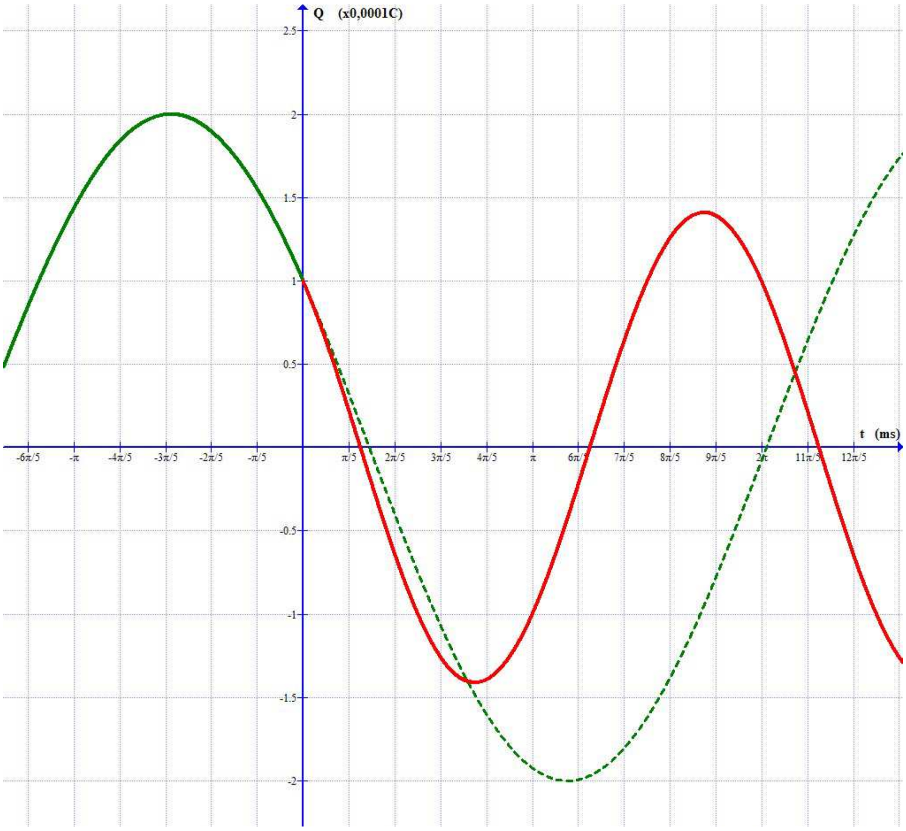
$$\frac{dU_E}{dt}=P_c=V_c.i=\frac{q.i}{C}=\frac{10^{-4}\left(-10^{-1}\right)}{10^{-4}}\,J/s=-0{,}1\,J/s$$

Δηλαδή όσος υπολογίστηκε προηγουμένως.

Τώρα επειδή όση ενέργεια χάνει ο πυκνωτής τόση κερδίζει το πηνίο ισχύει ότι

$$\frac{dU_B}{dt}=-\frac{dU_E}{dt}=0{,}1\,J/s$$

Μοιάζει περίεργο το ότι την ακαριαία αλλάζει ο ρυθμός στο πηνίο. Με το βραχυκύκλωμα όμως αλλάζει η τάση στα άκρα του.



Επιμέλεια

Γιάννης Κυριακόπουλος