

### Ενέργειες στην εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Ένα σώμα μάζα 1kg ταλαντώνεται κατά την διεύθυνση του άξονα x με την επίδραση μιας δύναμης επαναφοράς της μορφής  $F_1 = -80x$ , όπου x η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, της δύναμης απόσβεσης της μορφής  $F_2 = -5v$ , όπου v η ταχύτητά του και μιας εξωτερικής δύναμης της μορφής  $F = F_0 \cdot \eta\mu(10t + \phi_0)$ . Μόλις σταθεροποιηθεί η κατάσταση, κάποια στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση, θέτουμε  $t=0$  και μετράμε το πλάτος της ταλάντωσης το οποίο βρίσκουμε  $A=0,1\text{m}$ .

- i) Να βρεθούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.
- ii) Κάποια στιγμή  $t_1$  το σώμα κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας του, ευρισκόμενο σε απομάκρυνση  $x_1 = +6\text{cm}$ . Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:
  - α) Η κινητική και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.
  - β) Οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής και δυναμικής ενέργειας.
  - γ) Η ισχύς της δύναμης απόσβεσης και ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στο σώμα μέσω της εξωτερικής δύναμης F.
- iii) Αν αυξήσουμε την συχνότητα της εξωτερικής δύναμης στην τιμή  $f_1 = 2\text{Hz}$  το πλάτος ταλάντωσης θα αυξηθεί, θα μειωθεί ή θα παραμείνει σταθερό;

#### Απάντηση:

- i) Η εξίσωση της απομάκρυνσης, αφού για  $t=0$  το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του με κατεύθυνση προς την θετική φορά, θα είναι της μορφής  $x = A\eta\mu\omega t$ , όπου η γωνιακή συχνότητα  $\omega = 10\text{rad/s}$ , αφού το σώμα θα ταλαντώνεται με τη συχνότητα του διεγέρτη (εξωτερική δύναμη). Συνεπώς:

$$x = 0,1 \cdot \eta\mu(10t) \text{ (S.I.) (1)}$$

Αλλά τότε:

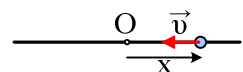
$$v = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t = 1 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \text{ (S.I.) (2) και}$$

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(10t) = -10 \cdot \eta\mu(10t) \text{ (S.I.) (3)}$$

- ii) Από την εξίσωση (1)  $x = 0,1 \cdot \eta\mu(10t)$  ή  $0,06 = 0,1 \eta\mu(10t)$  άρα  $\eta\mu(10t) = 0,6$ . Αλλά

$$\eta\mu^2(10t) + \sigma\upsilon\nu^2(10t) = 1 \rightarrow \sigma\upsilon\nu(10t) = \pm 0,8.$$

Όμως με βάση το διπλανό σχήμα, το σώμα κινείται προς την θέση ισορροπίας του, συνεπώς έχει αρνητική ταχύτητα,  $v = 1 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) = -0,8\text{m/s}$ .



- α) Οπότε για τις ενέργειες έχουμε:

$$U = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} 80 \cdot 0,06^2 \text{ J} = 0,144\text{J}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 0,8^2 \text{ J} = 0,32\text{J}$$

- β) Οι ζητούμενοι ρυθμοί είναι:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{-dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt} = -|F_{\varepsilon\pi}| \cdot |v| \cdot \sigma \nu \alpha$$

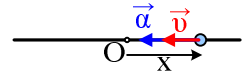
όπου  $\alpha$  η γωνία μεταξύ της δύναμης επαναφοράς και της ταχύτητας, εδώ  $\alpha=0$ , οπότε:

$$\frac{dU}{dt} = -|F_{\varepsilon\pi}| \cdot |v| = -Dx \cdot v = -80 \cdot 0,06 \cdot 0,8 \text{ J/s} = -3,84 \text{ J/s}$$

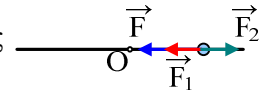
$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\acute{o}\lambda}}{dt} = |\Sigma F| \cdot |v| \cdot \sigma \nu \alpha = |ma| \cdot |v| \cdot \sigma \nu \alpha$$

Αλλά η επιτάχυνση του σώματος είναι  $a = -10 \cdot \eta\mu(10t) = -6 \text{ m/s}^2$  με φορά προς τα αριστερά, όπως και η ταχύτητα, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Έτσι:

$$\frac{dK}{dt} = |ma| \cdot |v| = 1 \cdot 6 \cdot 0,8 \text{ J/s} = 4,8 \text{ J/s}$$



γ) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στην παραπάνω θέση, όπου  $F_2 = F_{\acute{a}\tau} = -5v = -5 \cdot (-0,8) \text{ N} = +4 \text{ N}$ , συνεπώς η ισχύς της είναι:



$$P_{F_2} = |F_2| \cdot |v| \cdot \sigma \nu \alpha = 4 \cdot 0,8 \cdot (-1) \text{ W} = -3,2 \text{ W}.$$

Εξάλλου ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στο σώμα μέσω της εξωτερικής δύναμης, είναι ίσος με την ισχύ της δύναμης  $F$ . Αλλά  $\Sigma F = ma$  ή  $F + F_1 + F_2 = ma \rightarrow$

$$F - 4,8 \text{ N} + 4 \text{ N} = 1 \cdot (-6) \text{ N} \rightarrow F = -5,2 \text{ N}$$

Πράγμα που σημαίνει ότι έχει κατεύθυνση προς την αρνητική κατεύθυνση, συνεπώς:

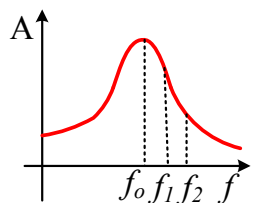
$$\frac{dW}{dt} = P_F = |F| \cdot |v| \cdot \sigma \nu \alpha = 5,2 \cdot 0,8 \text{ J/s} = 4,16 \text{ J/s}$$

iii) Η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή είναι  $f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{80} \approx 1,3 \text{ Hz}$  ενώ

η αρχική συχνότητα του διεγέρτη ήταν  $f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} \text{ Hz} \approx 1,6 \text{ Hz}$  ήταν δηλαδή

μεγαλύτερη από την ιδιοσυχνότητα. Αυξάνοντας και άλλο τη συχνότητα του

διεγέρτη, στην τιμή  $f_2$  θα μειωθεί το πλάτος σύμφωνα με την καμπύλη συντονισμού του σχήματος.



### Σχόλιο:

Η εξωτερική δύναμη προσφέρει στο σώμα 4,16 J/s, από αυτά τα 3,2 J/s μετατρέπονται σε θερμότητα εξαιτίας της δύναμης απόσβεσης και τα υπόλοιπα 0,96 J/s συν τα 3,84 J/s (η μείωση της δυναμικής ενέργειας) εμφανίζονται σαν αύξηση της κινητικής ενέργειας του σώματος.

### Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης