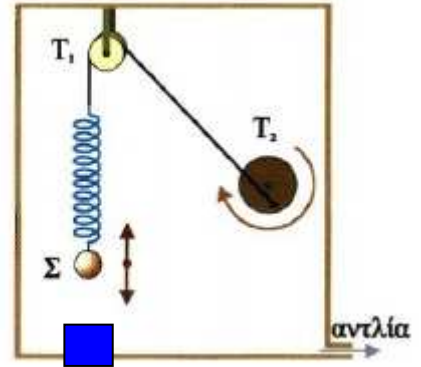


ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Ένα σώμα Σ μάζας $m=1\text{kg}$, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση σταθεράς απόσβεσης b με τη βοήθεια της διπλανής διάταξης. Ο τροχός περιστρέφεται με συχνότητα f_1 τέτοια ώστε να ολοκληρώνει **200** περιστροφές σε χρονική διάρκεια **20π s**, με αποτέλεσμα το σώμα στη μόνιμη κατάσταση να ταλαντώνεται με εξίσωση απομάκρυνσης $x=0,05\eta\mu\omega t$ (S.I.).



Μειώνοντας την συχνότητα περιστροφής του τροχού κατά **55%**, το πλάτος μεταβάλλεται κατά **3cm** και γίνεται το μέγιστο δυνατό.

α) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα του πλάτους σε συνάρτηση με την συχνότητα περιστροφής του τροχού σε βαθμολογημένους άξονες.

β) Η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος μπορεί να είναι:

- i) $\frac{3}{\pi} \text{ Hz}$
- ii) $\frac{4}{\pi} \text{ Hz}$
- iii) $\frac{5}{\pi} \text{ Hz}$

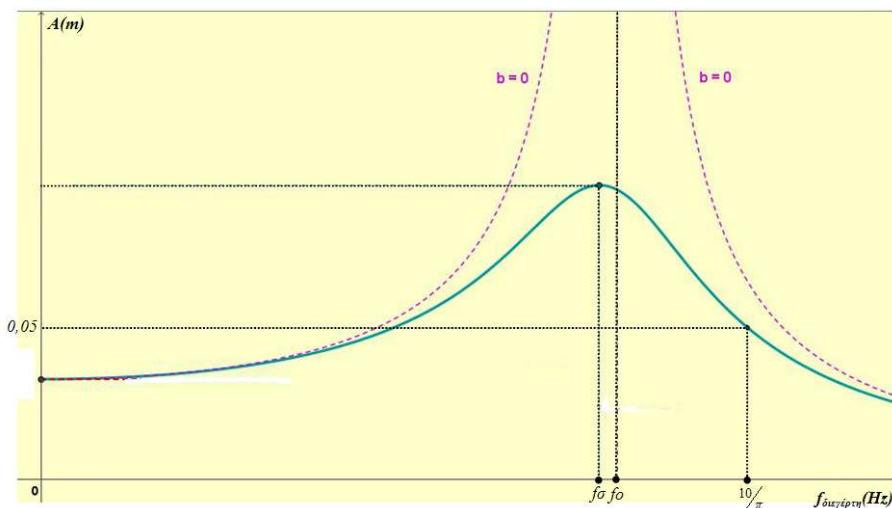
γ) Για την τιμή ιδιοσυχνότητας που υπολογίσατε στο (β) ερώτημα να υπολογίσετε την σταθερά του ελατηρίου και το πλάτος στην κατάσταση συντονισμού.

δ) Κάποια στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1=+4\text{cm}$ πλησιάζοντας προς τη θέση ισορροπίας του και η διεγείρουσα δύναμη έχει τιμή $F_\delta=-12,12\text{N}$. Να υπολογιστεί η σταθερά απόσβεσης b .

Λύση:

α) Η συχνότητα περιστροφής του τροχού είναι: $f_\delta = \frac{N}{\Delta t} = \frac{200}{20\pi} \Rightarrow f_\delta = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$

Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση, η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος είναι ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη-τροχού.



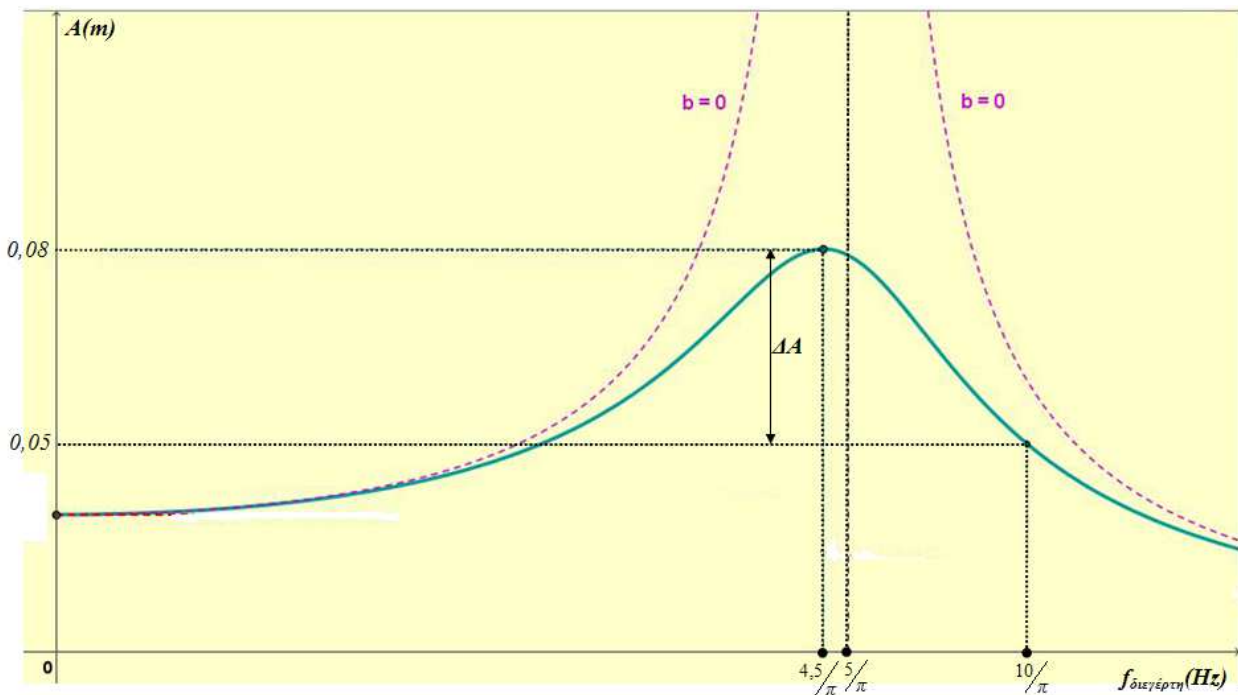
Παρατήρηση: Σε αντίθεση με ό,τι δεν φαίνεται στην λεζάντα του σχολικού βιβλίου, στην παραπάνω γραφική παράσταση, φαίνεται ότι η μεγιστοποίηση του πλάτους(συντονισμός) πραγματοποιείται για μία τιμή της συχνότητας του διεγέρτη f_σ λίγο μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_o . Μόνο στην περίπτωση όπου $b=0$, η μεγιστοποίηση του πλάτους πραγματοποιείται όταν η συχνότητα του διεγέρτη είναι ακριβώς ίση με την ιδιοσυχνότητα f_o .

β) Η συχνότητα στην οποία πραγματοποιείται η μεγιστοποίηση του πλάτους είναι:

$$f_\sigma = f_\delta - \frac{55}{100} f_\delta = \frac{45}{100} f_\delta = \frac{4,5}{\pi} \text{ Hz}$$

Γνωρίζουμε ότι η συχνότητα του διεγέρτη για την οποία το σύστημα ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος είναι λίγο μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_o (συχνότητα της αντίστοιχης ελεύθερης και αμείωτης ταλάντωσης). Άρα η πιθανή τιμή ιδιοσυχνότητας θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από $\frac{4,5}{\pi} \text{ Hz}$. Οπότε:

$$f_o = \frac{5}{\pi} \text{ Hz} \quad (\text{iii σωστό})$$



γ) Για την ιδιοσυχνότητα ισχύει:

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = 4\pi^2 \cdot f_o^2 \cdot m \Rightarrow k = 100 \text{ N/m}$$

Μειώνοντας τη συχνότητα του διεγέρτη από το πλάτος αυξάνεται όπως προκύπτει το διάγραμμα του (α) ερωτήματος. Οπότε το πλάτος συντονισμού είναι:

$$A_{\text{max}} = A + \Delta A = 0,05 + 0,03 \rightarrow A_{\text{max}} = 0,08 \text{ m}$$

δ) Σε κάθε αμείωτη ταλάντωσης(ταλάντωση σταθερού πλάτους) ισχύει η σχέση

$$u^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

Οπότε η ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$u_1 = \pm \omega_\delta \sqrt{A^2 - x_1^2} = \pm 2\pi \cdot f_\delta \sqrt{A^2 - x_1^2} = \pm 2\pi \cdot \frac{10}{\pi} \sqrt{25 \cdot 10^{-4} - 16 \cdot 10^{-4}} = \pm 20 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

Και επειδή το σώμα πλησιάζει προς τη θέση ισορροπίας του

$$u_1 = -0,6 \text{ m/s}$$

Εφαρμόζοντας τον 2^ο νόμο Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} + F_{\text{αντ}} + F_\delta = m \cdot a \Rightarrow -Dx - bu + F_\delta = m \cdot (-\omega_\delta^2 x)$$

όπου $D=k=100\text{N/m}$.

Οπότε την χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F = ma \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} + F_{\text{αντ}} + F_\delta &= m \cdot a \Rightarrow -Dx_1 - bu + F_\delta = m \cdot (-\omega_\delta^2 x_1) \rightarrow \\ b &= \frac{-Dx_1 + F_\delta + m \cdot \omega_\delta^2 \cdot x_1}{u} = \frac{-100 \cdot 0,04 - 12,12 + 1 \cdot 20^2 \cdot 0,04}{-0,6} = \frac{-4 - 12,12 + 16}{-0,6} \\ &= 0,2 \text{ kg/s} \end{aligned}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Πέτρος Καραπέτρος