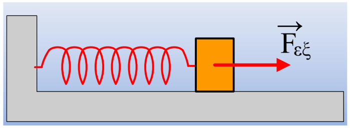
Ας δούμε και μια εξαναγκασμένη…



Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ελατηρίου, σταθεράς k=180N/m. Ασκούμε πάνω του μια περιοδική οριζόντια δύναμη, υποχρεώνοντάς το να εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση, όπου η δύναμη απόσβεσης είναι της μορφής $F_{απ}=-bυ$. Μόλις σταματήσουν τα μεταβατικά φαινόμενα, το σώμα ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος Α=0,2m. Θεωρώντας t=0 κάποια στιγμή, που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση, βρίσκουμε ότι η εξωτερική δύναμη παρέχεται από την εξίσωση:

$$F_{εξ} = 4\sqrt{2}\cdot ημ\left(10t+\frac{3\pi}{4}\right) \text{ (S.I.)}$$

i) Να βρεθούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος, σε συνάρτηση με το χρόνο.

ii) Να βρεθεί η δύναμη απόσβεσης τη στιγμή t=0, καθώς και η σταθερά απόσβεσης b.

iii) Τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{7\pi}{40}s$ να βρεθούν:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

γ) Ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα μέσω της δύναμης απόσβεσης.

δ) Ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στο σώμα, μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης.

iv) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα, τη χρονική στιγμή $t_2=\frac{\pi}{30}s$;

v) Αν μεταβάλουμε τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης στην τιμή $f_2=2Hz$, τι θα συμβεί με το πλάτος της ταλάντωσης (μετά το τέλος των μεταβατικών φαινομένων και την αποκατάσταση σταθερής κατάστασης);

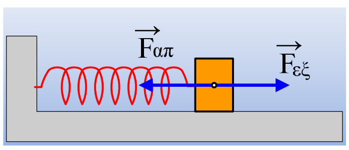
Δίνεται $ημ\left(\frac{\pi}{12}\right)\approx 0,26$

Απάντηση:

i) Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής $x=A\cdot ημ(ω_δ t)$, όπου $ω_δ=10rad/s$ η γωνιακή συχνότητα του διεγέρτη, συνεπώς $x=0,2\cdot ημ10t$ (S.I.).

Αλλά τότε $υ=υ_{max}\cdot συν(ω_δ t) = ω_δ A\cdot συν(ω_δ t)= 2\cdot συν10t$ (S.I.) και

$$α=-ω_δ^2 A\cdot ημ(ω_δ t)= -20\cdot ημ10t \text{ (S.I.)}$$



ii) Τη χρονική στιγμή t=0, το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του (x=0, θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου) και πάνω του ασκούνται η δύναμη απόσβεσης $F_{απ}$=-bυ και η εξωτερική δύναμη $F_{εξ}$, όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά ΣF=0, όπου:

$$F_{εξ} = 4\sqrt{2}\eta\mu\left(20t+\frac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\eta\mu\left(20\cdot 0+\frac{3\pi}{4}\right) = 4\text{N}$$

Συνεπώς και η δύναμη απόσβεσης έχει μέτρο $F_{απ}$=4N, με φορά προς τα αριστερά. Αλλά τότε:

$$F_{εξ}=-b\upsilon \quad \text{οπότε} \quad b = -\frac{F_{a\pi}}{\upsilon_{\max}} = -\frac{-4}{2}kg/s = 2kg/s$$

iii) Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{7\pi}{40}s$ το σώμα βρίσκεται στη θέση:

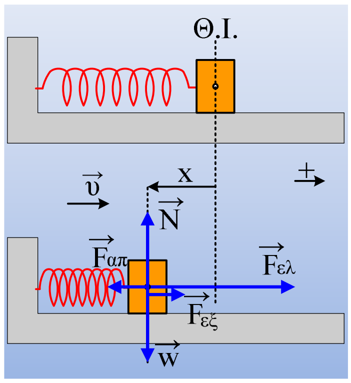
$$x = 0{,}2\cdot\eta\mu\left(10\frac{7\pi}{40}\right) = 0{,}2\cdot\eta\mu\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -0{,}2\frac{\sqrt{2}}{2}m = -0{,}1\sqrt{2}m$$

κινούμενο με ταχύτητα $\upsilon = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(10\cdot\frac{7\pi}{40}\right) = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2}m = \sqrt{2}m/s$

και επιτάχυνση $a = -\omega^2 x = -10^2\cdot(-0{,}1\sqrt{2})m/s^2 = +10\sqrt{2}m/s^2$

ενώ $F_{εξ} = 4\sqrt{2}\eta\mu\left(10\cdot\frac{7\pi}{40}+\frac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{10\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{2}N$

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση αυτή, οπότε για τους ζητούμενους ρυθμούς έχουμε:



α) $\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{Fελ}}{dt} = -|kx|\cdot|\upsilon|\sigma\upsilon\nu 0^o = -|kx|\cdot|\upsilon|$ ή

$$\frac{dU}{dt} = -|kx|\cdot|\upsilon| = -180\cdot 0{,}1\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}J/s = -36J/s$$

β) $\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{Fολ}}{dt} = |\Sigma F|\cdot|\upsilon|\sigma\upsilon\nu 0^o = |ma|\cdot|\upsilon| \rightarrow$

$$\frac{dK}{dt} = |ma|\cdot|\upsilon| = 2\cdot 10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}J/s = 40J/s$$

γ) $P_{F_{a\pi}} = |F_{a\pi}|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu 180^o = -b|\upsilon^2| = -2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 W = -4W$

δ) $P_{Fεξ} = |F_{εξ}|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu 0^o = |F_{εξ}|\cdot|\upsilon|$ ή

$$P_{Fεξ} = |F_{εξ}|\cdot|\upsilon| = 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}W = 8W$$

iv) Τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{\pi}{30}s$ το σώμα βρίσκεται στη θέση:

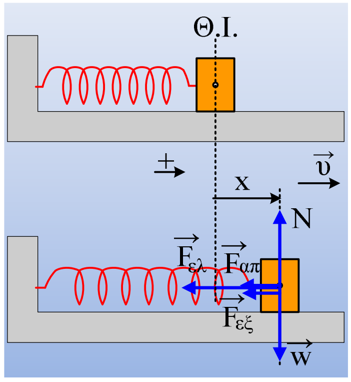
$$x = 0{,}2\cdot\eta\mu\left(10\cdot\frac{\pi}{30}\right) = 0{,}2\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}2\frac{\sqrt{3}}{2}m = 0{,}1\sqrt{3}m$$

κινούμενο με ταχύτητα $\upsilon = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(10\cdot\frac{\pi}{30}\right) = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\frac{1}{2} = 1m/s$

και επιτάχυνση $a = -\omega^2 x = -10^2\cdot 0{,}1\sqrt{3}m/s^2 = -10\sqrt{3}m/s^2$

ενώ $F_{\varepsilon\xi} = 4\sqrt{2}\eta\mu\left(10\cdot\frac{\pi}{30}+\frac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{13\pi}{12}\right) = 4\sqrt{2}\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right) \approx -1{,}45N$

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση αυτή, οπότε για τους ζητούμενους ρυθμούς έχουμε:



α) $\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F\varepsilon\lambda}}{dt} = -|kx|\cdot|\upsilon|\sigma\upsilon\nu180^o = |kx|\cdot|\upsilon|$ ή

$$\frac{dU}{dt} = |kx|\cdot|\upsilon| = 180\cdot 0{,}1\sqrt{3}\cdot 1J/s = 18\sqrt{3}J/s$$

β) $\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{F o\lambda}}{dt} = |\Sigma F|\cdot|\upsilon|\sigma\upsilon\nu180^o = -|ma|\cdot|\upsilon| \rightarrow$

$$\frac{dK}{dt} = -|ma|\cdot|\upsilon| = -2\cdot10\sqrt{3}\cdot1J/s = -20\sqrt{3}J/s$$

γ) $P_{F_{a\pi}} = |F_{a\pi}|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu180^o = -b|\upsilon^2| = -2\cdot1^2W = -2W$

δ) $P_{F\varepsilon\xi} = |F_{\varepsilon\xi}|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu180^o = -|F_{\varepsilon\xi}|\cdot|\upsilon|$ ή

$$P_{F\varepsilon\xi} = -|F_{\varepsilon\xi}|\cdot|\upsilon| = -1{,}45\cdot 1W \approx -1{,}45W$$

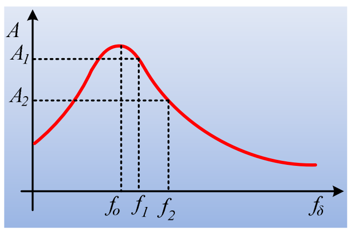
v) Η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του σώματος, δεμένο στο άκρο του ίδιου ελατηρίου, χωρίς εξωτερική δύναμη, αλλά και χωρίς αποσβέσεις, είναι:

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{180}{2}}Hz \approx 1{,}5Hz$$

Ενώ αρχικά η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης ήταν

$$f_1 = \frac{\omega_\delta}{2\pi} = \frac{10}{2\pi}Hz \approx 1{,}6Hz$$

Σχεδιάζουμε την καμπύλη συντονισμού, όπως στο διπλανό σχήμα. Μεταβάλλοντας την συχνότητα της εξωτερικής δύναμης (του διεγέρτη) στην τιμή $f_2=2Hz$, παρατηρούμε με βάση το διάγραμμα ότι το πλάτος ταλάντωσης θα μειωθεί, από την τιμή A_1 στην τιμή A_2.



Σχόλιο:

Αν προσέξουμε τους ρυθμούς μεταβολής που υπολογίσαμε στο ερώτημα iii), θα δούμε ότι η δυναμική ενέργεια μειώνεται κατά 36J/s, ενώ η κινητική αυξάνεται κατά 40J/s, πράγμα που σημαίνει ότι τη στιγμή αυτή παρουσιάζεται αύξηση της ενέργειας ταλάντωσης κατά 4J/s. Πού βρέθηκε η ενέργεια αυτή;

Η εξωτερική δύναμη παρέχει ενέργεια με ρυθμό 8J/s, από τα οποία τα 4J/s αφαιρούνται μέσω του έργου της δύναμης απόσβεσης ($P_{Fαπ}$=-4W) και τα υπόλοιπα 4J/s, είναι αυτά που προκαλούν την αύξηση της ενέργειας ταλάντωσης.

Αν προσέξετε στο ερώτημα iv) θα δείτε ότι η εξωτερική δύναμη έχει αρνητική ισχύ. Υπάρχουν δηλαδή και χρονικά διαστήματα που ο διεγέρτης απορροφά ενέργεια από το ταλαντούμενο σύστημα!!!

Δεν πρέπει να σκεφτόμαστε ότι κάθε στιγμή η ενέργεια που αφαιρεί η δύναμη απόσβεσης αναπληρώνεται από την δύναμη του διεγέρτη. Αυτό δεν συμβαίνει (με μια μοναδική εξαίρεση στην περίπτωση του συντονισμού), απλά στη διάρκεια της περιόδου, όση ενέργεια αφαιρείται από την δύναμη απόσβεσης, τόση προσφέρεται στο σύστημα μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης, με αποτέλεσμα το πλάτος ταλάντωσης να παραμένει σταθερή.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης