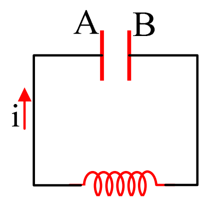
Ρυθμός μεταβολής της έντασης.



Φορτίζουμε έναν πυκνωτή χωρητικότητας 10μF από μια τάση 20V και αφού απομακρύνουμε την πηγή, συνδέουμε τους οπλισμούς του με ένα ιδανικό πηνίο, οπότε πραγματοποιείται μια αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. Θεωρούμε t=0 κάποια στιγμή που ο οπλισμός αναφοράς Α του πυκνωτή έχει φορτίο $q=10^{-4}$C, ενώ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης $i=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Α, με φορά όπως στο σχήμα.

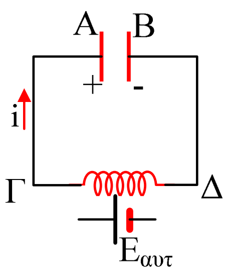
i) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής:
   α) του φορτίου του οπλισμού αναφοράς Α
   β) της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

ii) Να βρεθούν οι εξισώσεις του φορτίου του οπλισμού Α και της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.

iii) Πόση ενέργεια έχει για t=0 το πηνίο και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της;

Απάντηση:

Ο πυκνωτής απέκτησε αρχικά φορτίο $Q=C\cdot V=10\cdot 10^{-6}\cdot 20C=2\cdot 10^{-4}C$, το οποίο είναι και το μέγιστο φορτίο κατά την ηλεκτρική ταλάντωση που θα ακολουθήσει.



i) α) Τη στιγμή t=0, ο οπλισμός Α έχει θετικό φορτίο και το ηλεκτρικό ρεύμα μεταφέρει επίσης θετικό φορτίο σε αυτόν (συμβατική φορά του ρεύματος), άρα ο πυκνωτή φορτίζεται και ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου του είναι:

$$\frac{dq}{dt}=i=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{C/s}$$

β) Τη στιγμή αυτή το πηνίο λειτουργεί σαν πηγή προσφέροντας ενέργεια στο κύκλωμα, με ηλεκτρεγερτική δύναμη:

$$E_{αυτ}=-L\frac{di}{dt}\ \rightarrow \frac{di}{dt}=-\frac{E_{αυτ}}{L}\quad (1)$$

Αλλά η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή, συνεπώς:

$$E=U_B+U_E \text{ ή } \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}Li^2 \text{ ή}$$

$$L=\frac{Q^2-q^2}{Ci^2}=\frac{4\cdot 10^{-8}-1\cdot 10^{-8}}{10\cdot 10^{-6}\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)^2}H=4\cdot 10^{-3}H$$

$$\text{Ενώ } E_{αυτ}=V_{ΓΔ}=V_{AB}=\frac{q}{C}=10V$$

Οπότε από την σχέση (1) παίρνουμε:

$$\frac{di}{dt}=-\frac{E_{αυτ}}{L}=-\frac{10}{4\cdot 10^{-3}}A/s=-2.500A/s$$

Η αρνητική τιμή του παραπάνω ρυθμού σημαίνει ότι η ένταση του ρεύματος μειώνεται.

ii) Κατά την αντιστοιχία με τη μηχανική ταλάντωση, το φορτίο θα υπακούει σε μια εξίσωση της μορφής:

$$q= Q\cdot ημ(ωt+φ_0) \quad (2)$$

$$\text{όπου } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10\cdot 10^{-6}\cdot 4\cdot 10^{-3}}} rad/s = 5.000 rad/s$$

Για t=0 η (2) δίνει:

$$10^{-4}=2\cdot 10^{-4}\cdot ημφ_0 \quad \begin{cases} φ_0= 2κπ+\frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \\ ή \\ φ_0= 2κπ+π-\frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Αλλά στην περίπτωση αυτή (η ένταση του ρεύματος αντιστοιχεί στην ταχύτητα της μηχανικής ταλάντωσης) ισχύει $i=I\cdot συν(ωt+φ_0)$, οπότε για t=0:

$$i=I\cdot συν\frac{\pi}{6} >0 \quad ή \quad i=I\cdot συν\frac{5\pi}{6} <0$$

Αλλά τη στιγμή αυτή η ένταση του ρεύματος έχει φορά προς τον θετικό οπλισμό του πυκνωτή και θεωρείται θετική, συνεπώς $φ_0= \frac{\pi}{6}$, ενώ $I=Q\cdot ω=1$ A.

Συνεπώς οι ζητούμενες εξισώσεις είναι:

$$q= 2\cdot 10^{-4}\cdot ημ(5.000t+\frac{\pi}{6}) \quad (S.I.)$$

$$i= 1\cdot συν(5.000t+\frac{\pi}{6}) \quad (S.I.)$$

iii) Η ενέργεια του πηνίου είναι:

$$U_B= ½\, Li^2 = \frac{1}{2} 4\cdot 10^{-3}\cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 J = 1{,}5\cdot 10^{-3} J$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της είναι:

$$\frac{dU_B}{dt} = -\left|E_{αυτ}\right|\cdot i = -10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} J/s = -5\sqrt{3} J/s$$

Το (-) στον παραπάνω τύπο σημαίνει ότι αφού το πηνίο λειτουργεί σαν πηγή, παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα (η οποία μεταφέρεται μέσω του ρεύματος στον πυκνωτή), συνεπώς η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου μειώνεται.

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης