Ηλεκτρική ταλάντωση- Παρατηρήσεις και μία εφαρμογή

Στο κύκλωμα LC μία τυχαία χρονική στιγμή t, από 2^o κανόνα Kirchoff έχουμε:

$$V_L + V_C = 0 \rightarrow V_L = -V_C$$

$$\boxed{L\frac{di}{dt} = -\frac{q}{C}} \quad (1)$$

Με εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου Νεύτωνα σε ένα μηχανικό σύστημα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:

$$\Sigma F = ma \rightarrow$$

$$-D \cdot x = m\frac{du}{dt}$$

$$\boxed{m\frac{du}{dt} = -D \cdot x} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παρατηρούμε ότι τα δύο συστήματα περιγράφονται από τις ίδιες διαφορικές εξισώσεις. Όπως η ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης x, έτσι και η ένταση ρεύματος είναι ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου. Έτσι, ανάμεσα στα δύο συστήματα υπάρχει η αντιστοιχία:

$$q \leftrightarrow x$$

$$i \leftrightarrow u$$

$$L \leftrightarrow m$$

$$\frac{1}{C} \leftrightarrow D$$

Η απομάκρυνση και η ταχύτητα στην α.α.τ. έχουν χρονικές εξισώσεις

$$\boldsymbol{x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{u = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o)}$$

δεδομένης της αναλογίας της παραπάνω αναλογίας, οι αντίστοιχες χρονικές εξισώσεις του φορτίου και της έντασης του ρεύματος θα είναι:

$$\boldsymbol{q = Q\eta\mu(\omega t + \varphi_o)} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{i = \omega Q\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o)}$$

☞ Γνωρίζουμε από την Β' Λυκείου ότι **φορτίο πυκνωτή** είναι το φορτίο του θετικού του οπλισμού ή η απόλυτη τιμή του φορτίου του αρνητικού του οπλισμού. Επομένως, είναι πάντα **θετική ποσότητα** . Στην σχέση όμως $q=Q\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$, το q μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές. Επομένως η **δεν δίνει το γνωστό μας φορτίο πυκνωτή**, αλλά το φορτίο ενός αυθαίρετα εκλεγμένου οπλισμού (που μπορούμε να αποκαλούμε οπλισμό αναφοράς), όπως και στη μηχανική ταλάντωση θεωρούμε θετική μια αυθαίρετα εκλεγμένη φορά στον άξονα ταλάντωσης.

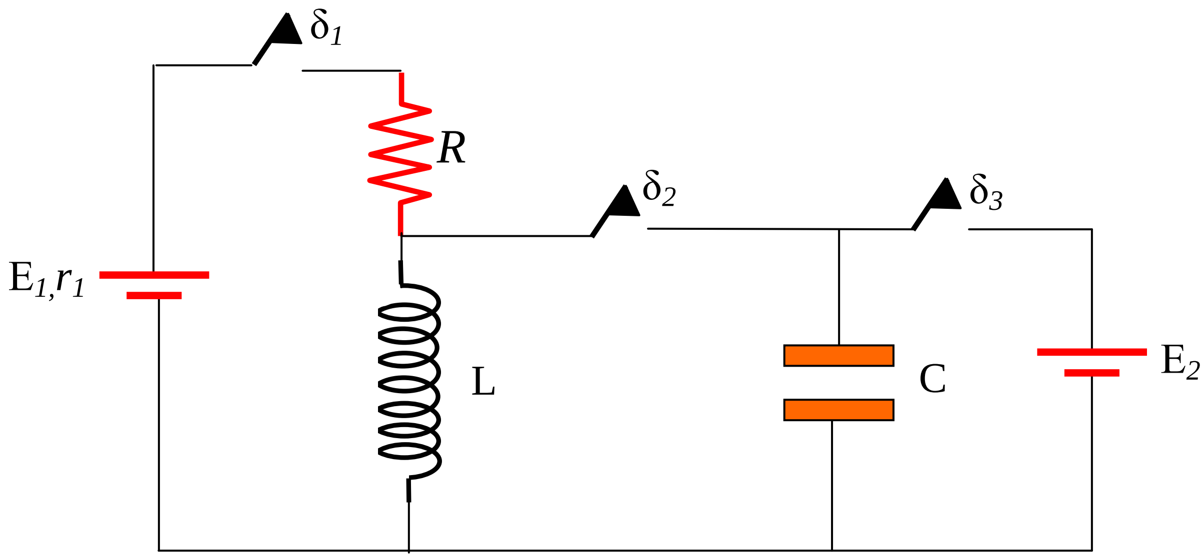
Οπλισμό αναφοράς θεωρούμε τον οπλισμό που τη χρονική στιγμή t=0 έχει θετικό φορτίο ή, αν τη στιγμή t=0 ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος, τον οπλισμό που αμέσως μετά θα φορτιστεί θετικά.

☞Ένταση ρεύματος θεωρούμε στο κύκλωμα LC το ρυθμό μεταβολής του φορτίου του οπλισμού αναφοράς του πυκνωτή. Επομένως:

Η ένταση του ρεύματος έχει θετική αλγεβρική τιμή όταν το ρεύμα κατευθύνεται προς τον οπλισμό αναφοράς του πυκνωτή.

Εφαρμογή

Στο κύκλωμα του σχήματος δίνονται $E_1=10\sqrt{3}$ V, $r_1=2\Omega$, $R=48\Omega$, $E_2=4V$, το πηνίο είναι ιδανικό με συντελεστή αυτεπαγωγής L=4mH και ο πυκνωτής χωρητικότητα C=10μF.



Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις του φορτίου του οπλισμού αναφοράς του πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα της ηλεκτρικής ταλάντωσης σχεδιάζοντας και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις στις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η: Ο διακόπτης δ_1 είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα ενώ οι διακόπτες δ_2,δ_3 ανοικτοί. Κάποια χρονική στιγμή που τη θεωρούμε t=0, ανοίγουμε το διακόπτη δ_1 και κλείνουμε τον δ_2, διατηρώντας τον δ_3 ανοικτό.

Περίπτωση 2η: Ο διακόπτης δ_3 είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα ενώ οι διακόπτες δ_1,δ_2 ανοικτοί. Κάποια χρονική στιγμή που τη θεωρούμε t=0, ανοίγουμε το διακόπτη δ_3 και κλείνουμε τον δ_2, διατηρώντας τον δ_1 ανοικτό.

Περίπτωση 3η: Οι διακόπτες δ_1 και δ_3 είναι κλειστοί για μεγάλο χρονικό διάστημα ενώ οι διακόπτης δ_2 ανοικτός. Κάποια χρονική στιγμή που τη θεωρούμε t=0, ανοίγουμε τους διακόπτες δ_1 και δ_3 και κλείνουμε τον δ_2.

Περίπτωση 1η: Αφού ο διακόπτης δ_1 είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα, το ρεύμα στον βρόγχο που περιλαμβάνει την πηγή (E_1,r_1), τον αντιστάτη R και το πηνίο έχει σταθεροποιηθεί, στο πηνίο δεν αναπτύσσεται ΗΕΔ από αυτεπαγωγή. Η ένταση του ρεύματος καθορίζεται από τα υπόλοιπα στοιχεία του κυκλώματος και η τιμή του καθορίζεται από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα:

$$I = \frac{E_1}{R + r_1} = 0{,}2\sqrt{3}A$$

Ανοίγοντας τον δ_1 και κλείνοντας τον δ_2, το κύκλωμα LC αρχίζει να εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις, οπότε αμέσως μετά την t=0 η ένταση του ρεύματος αρχίζει να ελαττώνεται μέχρι την στιγμή που μηδενίζεται, οπότε αλλάζει φορά και αυξάνεται ξανά, ώσπου αποκτά και πάλι την απόλυτη τιμή των $0{,}2\sqrt{3}$ A. Η ταλάντωση συνεχίζεται χωρίς ποτέ η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα να υπερβεί την απόλυτη τιμή των $0{,}2\sqrt{3}$ A. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή $0{,}2\sqrt{3}$ A είναι το πλάτος της έντασης του ρεύματος κατά την διάρκεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης.
Η χρονική εξίσωση του φορτίου του κάτω οπλισμού είναι:

$$q = Q \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o)$$

και της έντασης του ρεύματος

$$i = I \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o)$$

Για t=0 είναι q=0, άρα:

$$\begin{aligned} &\eta\mu\varphi_o = 0 \rightarrow \\ &\varphi_o = \kappa\pi \rightarrow \\ &\varphi_o = 0 \;\; \acute{\eta} \;\; \varphi_o = \pi \; rad \end{aligned}$$

Την $t=0^+$ λόγω μείωσης του ρεύματος, στο πηνίο αναπτύσσεται ΗΕΔ από αυτεπαγωγή, με πολικότητα τέτοια ώστε να αντιστέκεται στη μείωση του ρεύματος. Έτσι, στο κάτω άκρο του πηνίου εμφανίζεται ⊕ και στο πάνω −. Το πηνίο έχει κοινά άκρα με τον πυκνωτή, οπότε θα έχουν την ίδια πολικότητα, δηλαδή ο κάτω οπλισμός του πυκνωτή θα φορτιστεί θετικά, και τον θεωρούμε ως οπλισμό αναφοράς. Επειδή την t=0 το ρεύμα κατευθύνεται προς τον οπλισμό αναφοράς θα έχει θετική αλγεβρική τιμή i=+I>0 που σημαίνει ότι πρέπει $\sigma\upsilon\nu\varphi_o>0$, άρα $\varphi_o=0$.
Η γωνιακή συχνότητα της ηλεκτρικής ταλάντωσης θα είναι:

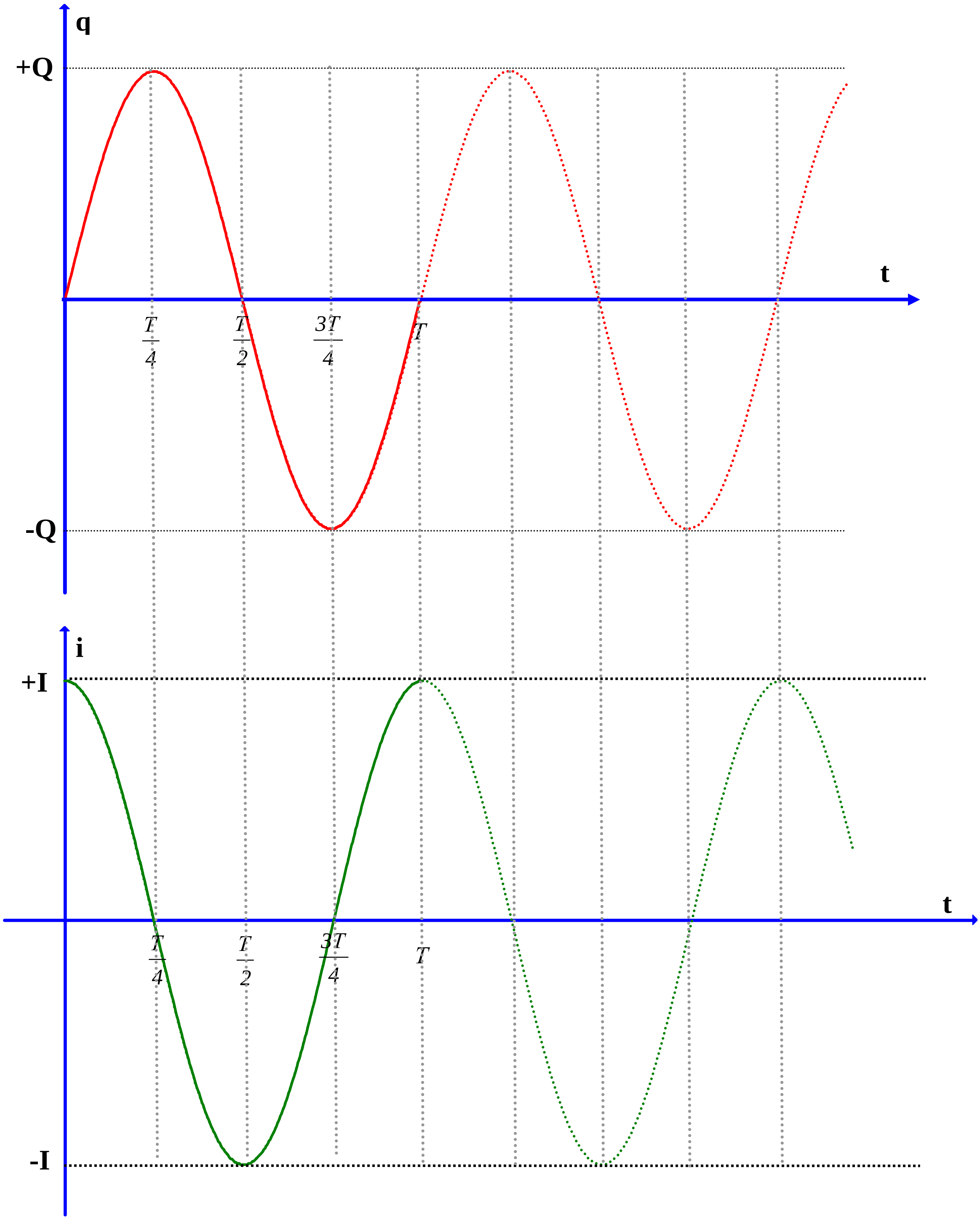
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} \rightarrow \omega = 5000 rad/s$$

Επίσης , το πλάτος του φορτίου θα είναι:

$$I = \omega Q \rightarrow Q = \frac{I}{\omega} = \frac{0{,}2\sqrt{3}}{5000} \rightarrow Q = 4\sqrt{3} \cdot 10^{-5} C$$

Έτσι, οι χρονικές εξισώσεις του φορτίου του κάτω οπλισμού του πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος θα είναι:

$$q = Q \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o) \rightarrow q = 4\sqrt{3} \cdot 10^{-5}\,\eta\mu(5000t)$$
$$i = I \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \rightarrow i = 0{,}2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu(5000t)$$



Περίπτωση 2η: Αφού ο διακόπτης $δ_3$ είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα, ο πυκνωτής είναι φορτισμένος, με φορτίο

$$q = C \cdot V_c \rightarrow q = C \cdot E_2 \rightarrow q = 4 \cdot 10^{-5} C$$

Από την χρονική στιγμή t=0 που ανοίγουμε τον διακόπτη $δ_3$ και ανοίγουμε τον $δ_2$, το κύκλωμα LC αρχίζει να εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Επειδή τη στιγμή t=0 το πηνίο δε διαρρέεται από ρεύμα και συνεπώς δεν έχει αποθηκευμένη ενέργεια και ο πυκνωτής είναι φορτισμένος, συμπεραίνουμε πώς το φορτίο του πυκνωτή εκείνη τη στιγμή είναι ίσο με το μέγιστο φορτίο κατά τη διάρκεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης. Θεωρώντας ως οπλισμό αναφοράς τον πάνω οπλισμό, για t=0 είναι $q=+Q$ και $i=0$, οπότε

$$\begin{aligned} &+Q = Q \cdot ημφ_o \\ &ημφ_o = 1 \rightarrow \\ &φ_o = 2κ \cdot π + \frac{π}{2} \xrightarrow{0 \le φ_o < 2π\ rad} \\ &φ_o = \frac{π}{2}\ rad \end{aligned}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ηλεκτρικής ταλάντωσης θα είναι:

$$ω = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow ω = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} \rightarrow ω = 5000 \text{rad/s}$$

Επίσης , το πλάτος του φορτίου θα είναι:

$$I = ωQ \rightarrow I = 5 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-5} \rightarrow I = 0{,}2A$$

Έτσι, οι χρονικές εξισώσεις του φορτίου του κάτω οπλισμού του πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος θα είναι:

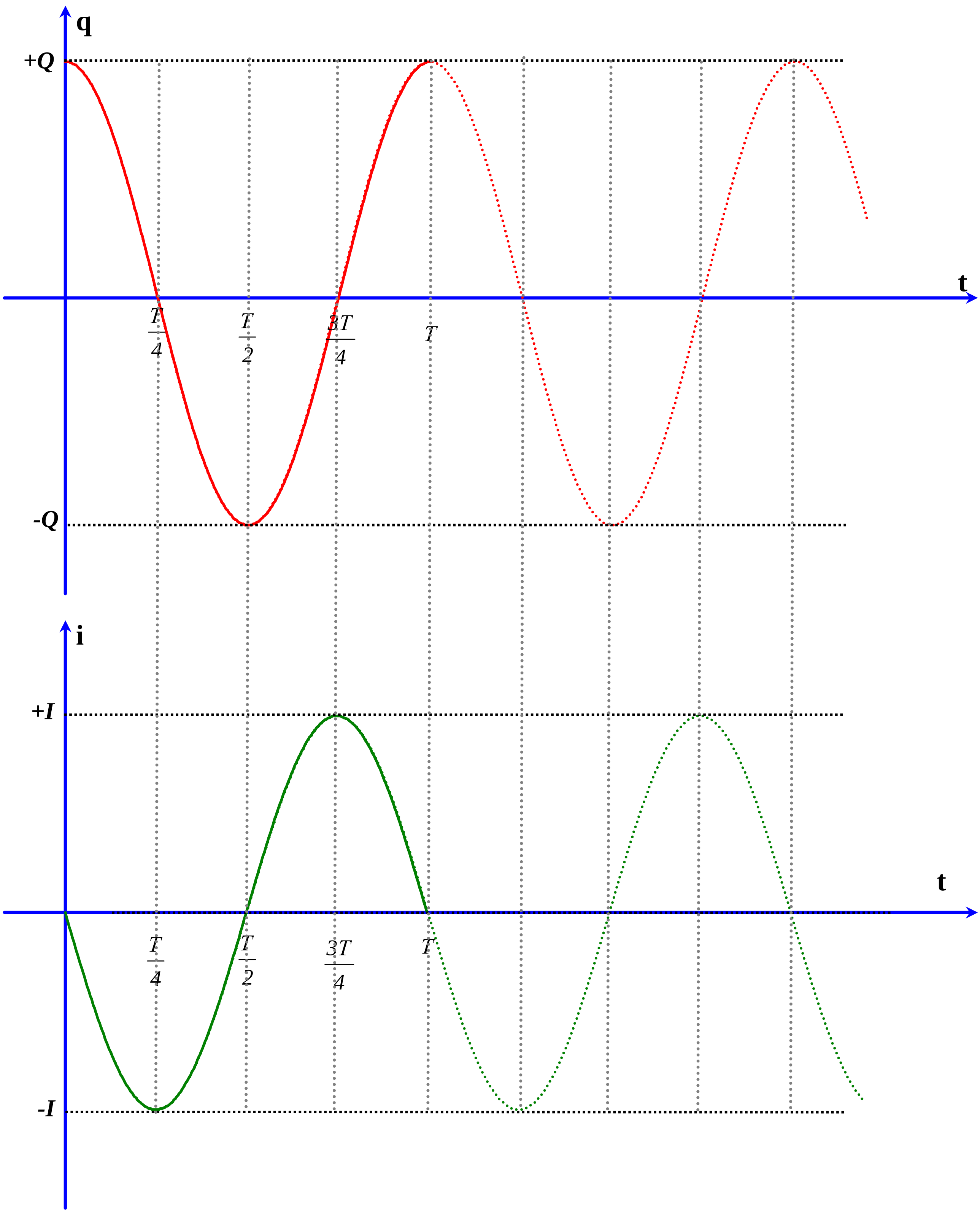
$$q = Q \cdot ημ(ωt + φ_o) \rightarrow q = 4 \cdot 10^{-5} ημ\left(5000t + \frac{π}{2}\right) \rightarrow q = 4 \cdot 10^{-5} συν(5000t)$$

$$i = I \cdot συν(ωt + φ_o) \rightarrow i = 0{,}2 \cdot συν\left(5000t + \frac{π}{2}\right) \rightarrow i = -0{,}2 \cdot ημ(5000t)$$

$ημ(φ+\frac{π}{2}) = συνφ$

$συν(φ+\frac{π}{2}) = -ημφ$

Οι γραφικές παραστάσεις του φορτίου και της έντασης του ρεύματος είναι οι παρακάτω.



Αυτή είναι και η περίπτωση με την οποία ασχολείται κυρίως και το σχολικό βιβλίο, αλλά όπως φαίνεται από όλο το κείμενο αυτή είναι μία από τις περιπτώσεις που μπορεί να συναντήσουμε κατά την μελέτη μίας ηλεκτρικής ταλάντωσης σ' ένα κύκλωμα LC.

Περίπτωση 3η: Αφού ο διακόπτης $δ_1$ είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα, το ρεύμα στον βρόγχο που περιλαμβάνει την πηγή (E_1,r_1), τον αντιστάτη R και το πηνίο έχει σταθεροποιηθεί, στο πηνίο δεν αναπτύσσεται ΗΕΔ από αυτεπαγωγή. Η ένταση του ρεύματος καθορίζεται από τα υπόλοιπα στοιχεία του κυκλώματος και η τιμή του καθορίζεται από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα:

$$I = \frac{E_1}{R + r_1} = 0{,}2\sqrt{3}A$$

Επίσης επειδή και ο $δ_3$ είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα, ο πυκνωτής θα είναι φορτισμένος με τον πάνω οπλισμό θετικά φορτισμένο. Η τάση στα άκρα του θα ισούται με την ΗΕΔ της πηγής E_2, άρα το φορτίο του θα είναι:

$$q = C \cdot V_c \rightarrow q = C \cdot E_2 \rightarrow q_2 = 4 \cdot 10^{-5} C$$

Κατά την διάρκεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης η ενέργεια παραμένει σταθερή, οπότε:

$$U_E + U_B = E_T \rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \rightarrow$$
$$Q = \sqrt{q^2 + \frac{i^2}{\omega^2}} \rightarrow$$
$$Q = \sqrt{16 \cdot 10^{-10} + \frac{0{,}12}{25 \cdot 10^6}} \rightarrow Q = 8 \cdot 10^{-5} C$$

Η χρονική εξίσωση του φορτίου του πάνω οπλισμού(που θεωρούμε ως οπλισμό αναφοράς) είναι:

$$q = Q \cdot ημ(\omega t + \varphi_o)$$

Για t=0 είναι $q=4 \cdot 10^{-5}C$, άρα:

$$4 \cdot 10^{-5} = 8 \cdot 10^{-5}\, ημ\varphi_o \rightarrow$$
$$ημ\varphi_o = \frac{1}{2} \rightarrow$$
$$\varphi_o = \frac{\pi}{6} rad \;\; ή \;\; \varphi_o = \frac{5\pi}{6} rad$$

Ποια τιμή αρχικής φάσης θα δεχτούμε;

Αυτό εξαρτάται από την αλγεβρική τιμή της έντασης του ρεύματος την t=0. Το ρεύμα κατευθύνεται προς τον κάτω οπλισμό (που δεν είναι οπλισμός αναφοράς). Συνεπώς εδώ η ένταση του ρεύματος έχει αρνητική αλγεβρική τιμή $i=-0{,}2\sqrt{3}$ A<0, οπότε πρέπει $συν\varphi_o<0$, άρα πρέπει:

$$\varphi_o = \frac{5\pi}{6} rad$$

Το πλάτος της έντασης του ρεύματος είναι:

$$I = \omega \cdot Q \rightarrow I = 5000 \cdot 8 \cdot 10^{-5} \rightarrow I = 0{,}4A$$

Έτσι, οι χρονικές εξισώσεις του φορτίου του πάνω οπλισμού του πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος θα είναι:

$$q = Q \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o) \rightarrow q = 8 \cdot 10^{-5}\,\eta\mu\left(5000t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$i = I \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \rightarrow i = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(5000t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

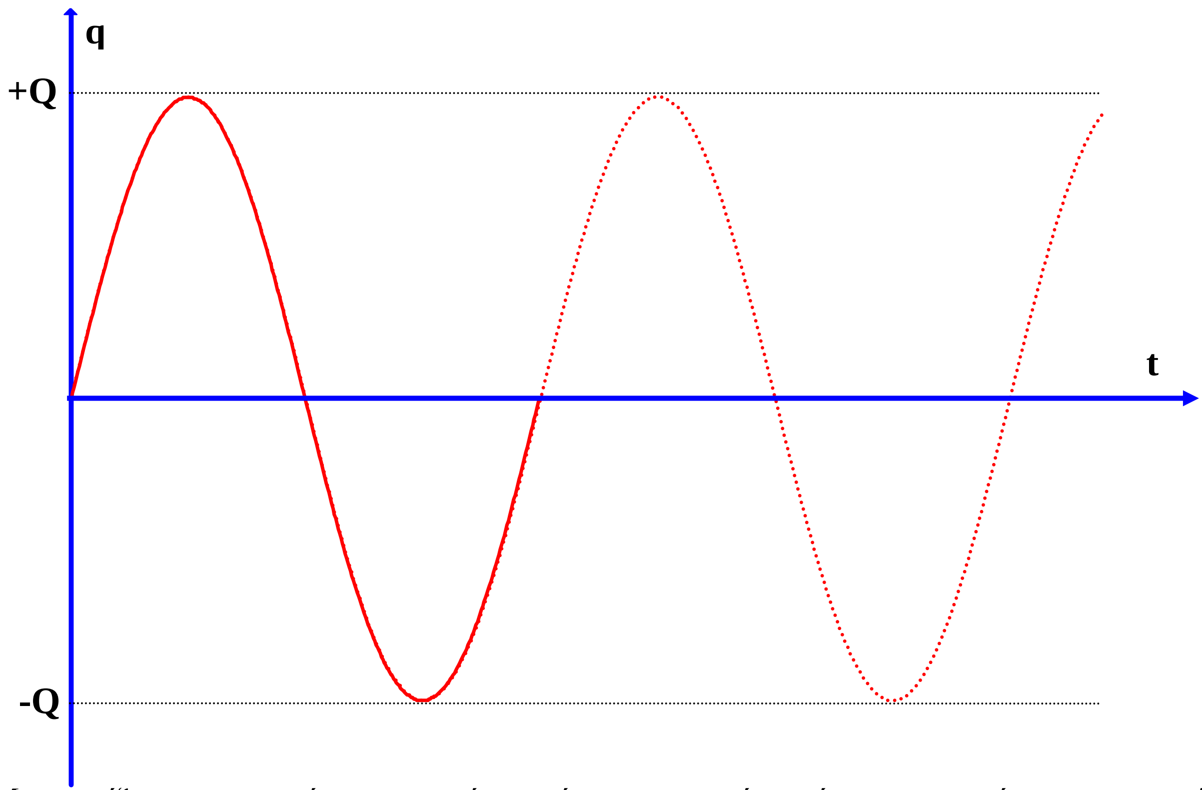
Στο σημείο αυτό είναι ενδιαφέρον να θυμηθούμε πώς σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση μίας ημιτονοειδούς ή συνημιτονοειδούς συνάρτησης με αρχική φάση.

Πιστεύω ότι θυμόμαστε αυτές οι γραφικές παραστάσεις προκύπτον από τις αντίστοιχες ημιτονοειδείς ή συνημιτονοειδείς χωρίς αρχική φάση με κατάλληλη μετατόπιση της αρχής συντεταγμένων.

Πόσο όμως μετατοπίζουμε την αρχή συντεταγμένων;

Στην συγκεκριμένη περίπτωση την t=0 η αλγεβρική τιμή του φορτίου είναι $q=+4\cdot10^{-5}C=+Q/2$.

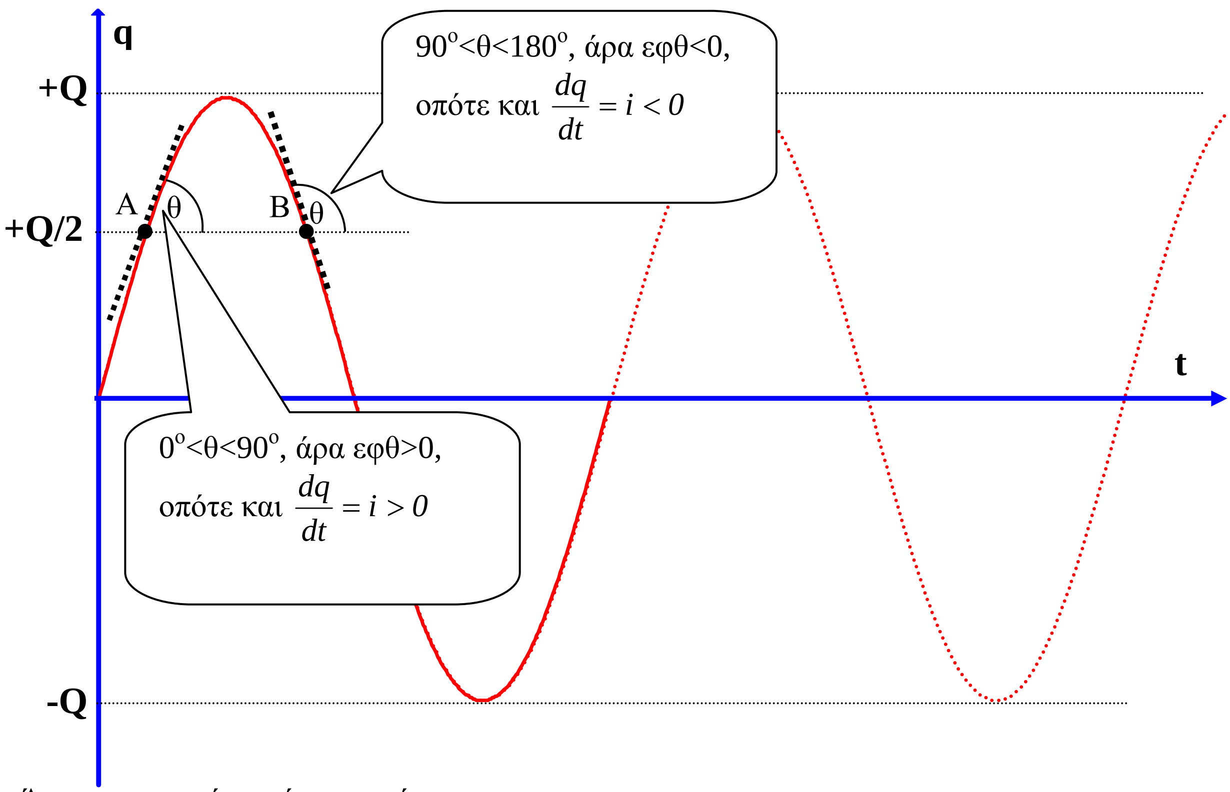
Σχεδιάζουμε την γνωστή μας ημιτονοειδή συνάρτηση χωρίς αυτή να έχει αρχική φάση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



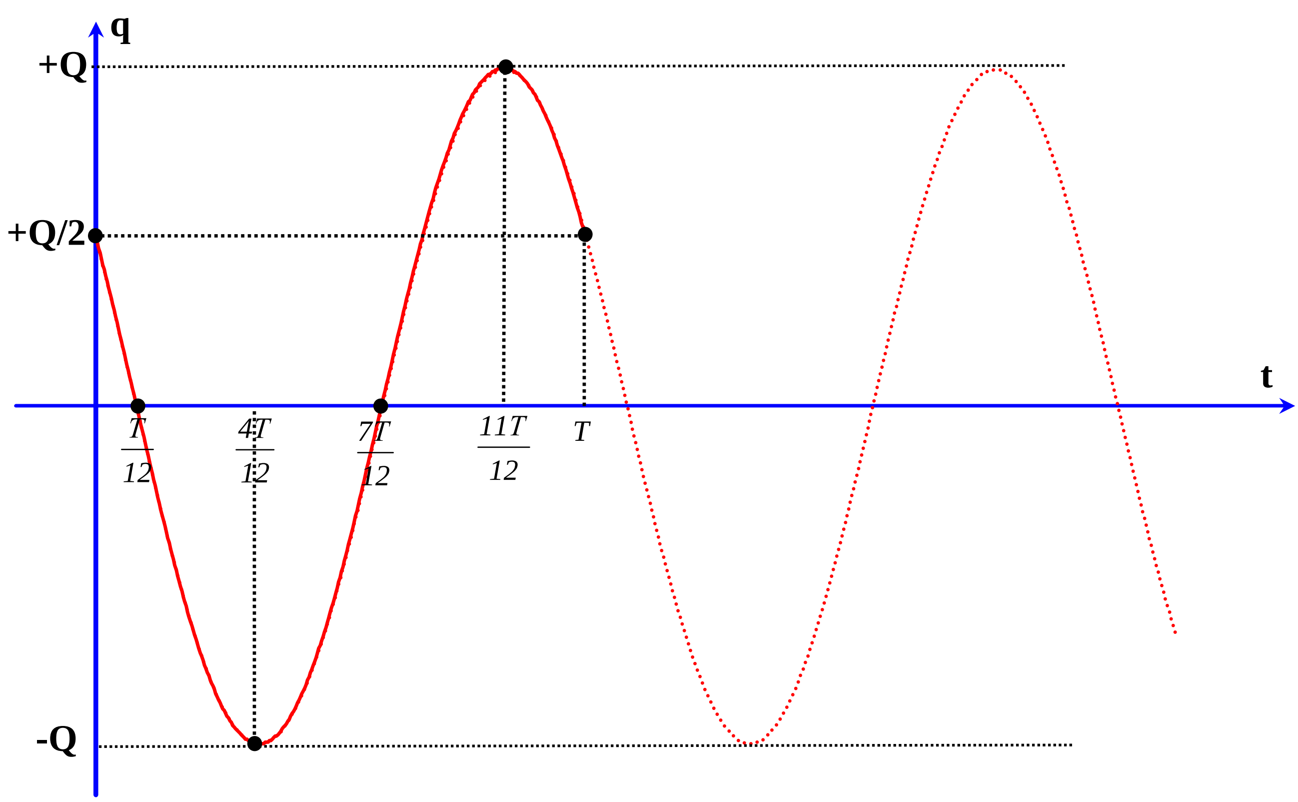
Μετατοπίζουμε την αρχή συντεταγμένων μέχρι η γραφική παράσταση να τμήσει τον κατακόρυφο άξονα του φορτίου στην τιμή $+\frac{Q}{2}$. Παρατηρούμε όμως ότι υπάρχουν δύο τέτοια σημεία(Α και Β) στα οποία αυτό συμβαίνει. Μέχρι που θα γίνει η μετατόπιση της αρχής συντεταγμένων;

Το ερώτημα αυτό μπορεί να απαντηθεί με δύο τρόπους:

Την t=0 η ένταση του ρεύματος έχει αρνητική αλγεβρική, πράγμα που σημαίνει ότι κλίση στο αντίστοιχο σημείο της q=f(t) πρέπει να είναι αρνητική, και αυτό συμβαίνει μόνο στο σημείο Β.



Άρα, η γραφική παράσταση είναι:



Όσον αφορά την βαθμολόγηση του οριζόντιου άξονα, βρίσκουμε την χρονική στιγμή που το φορτίο μηδενίζεται για πρώτη φορά:

$$0 = Q\eta\mu\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) \rightarrow \omega t + \frac{5\pi}{6} = \kappa\pi \rightarrow \omega t = \kappa\pi - \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{\kappa=0, t<0} \kappa = 1 : t = \frac{\pi}{6\omega} \xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}} t = \frac{T}{12}$$

Ξέρουμε ότι ανά Τ/4 η φάση του φορτίου του οπλισμού αναφοράς αυξάνει κατά π/2 rad. Φτιάχνουμε τον ακόλουθο πίνακα τιμών, όπου μετά την χρονική στιγμή Τ/12, λαμβάνουμε αυξανόμενες τιμές χρόνου ανά Τ/4, οπότε η φάση μετά την τιμή π θα αυξάνει κατά π/2.

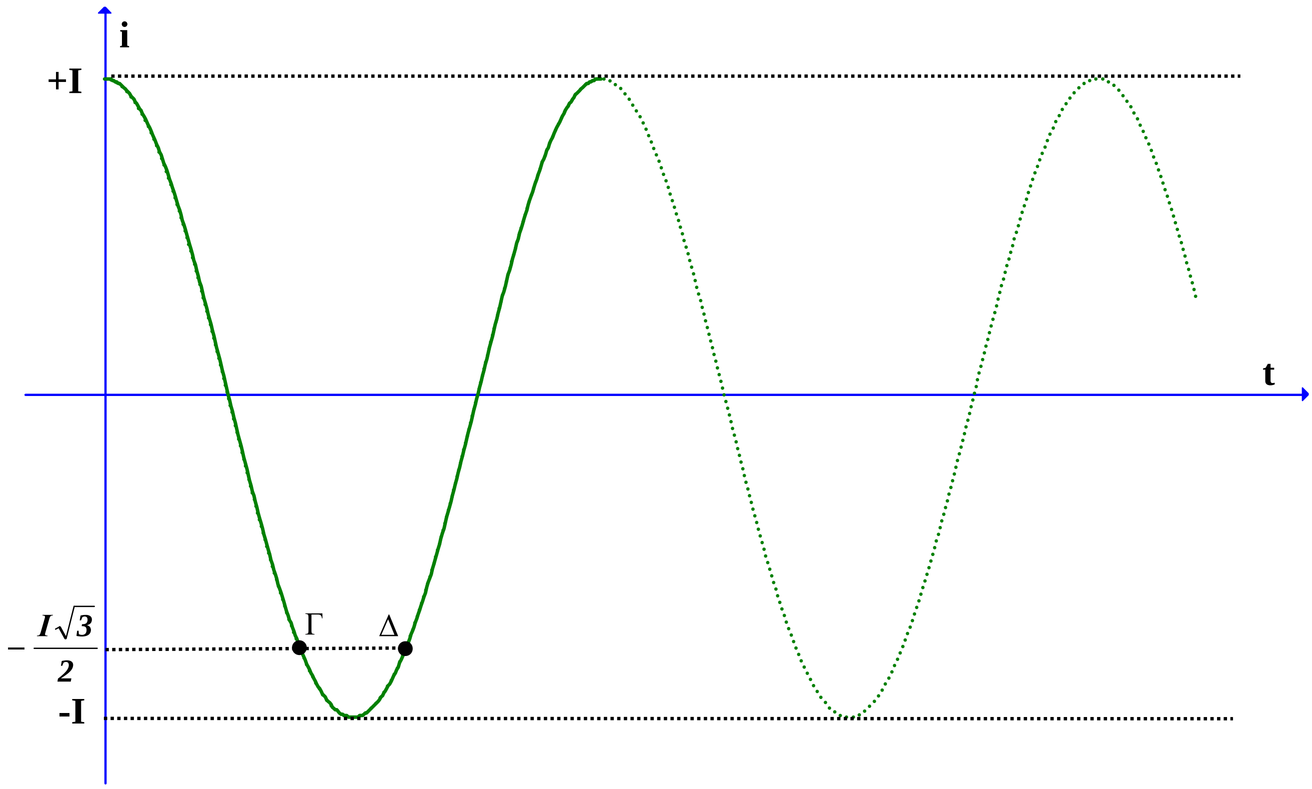
t	$\omega t + \frac{5\pi}{6}$	$q = Q\eta\mu\left(5000t + \frac{5\pi}{6}\right)$	$i = I \cdot \sigma\upsilon\nu\left(5000t + \frac{5\pi}{6}\right)$
0	$\frac{5\pi}{6}$	$+\frac{Q}{2}$	$-\frac{I\sqrt{3}}{2}$
Τ/12	π	0	$-I$
$\frac{T}{12} + \frac{T}{4} = \frac{4T}{12}$	$\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$	$-Q$	0
$\frac{4T}{12} + \frac{T}{4} = \frac{7T}{12}$	$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$	0	$+I$
$\frac{7T}{12} + \frac{T}{4} = \frac{11T}{12}$	$2\pi + \frac{\pi}{2}$	$+Q$	0
T	$2\pi + \frac{5\pi}{6}$	$+\frac{Q}{2}$	$-\frac{I\sqrt{3}}{2}$

(Ο πίνακας θα χρησιμοποιηθεί και κατά την κατασκευή της γραφικής παράστασης i=f(t))

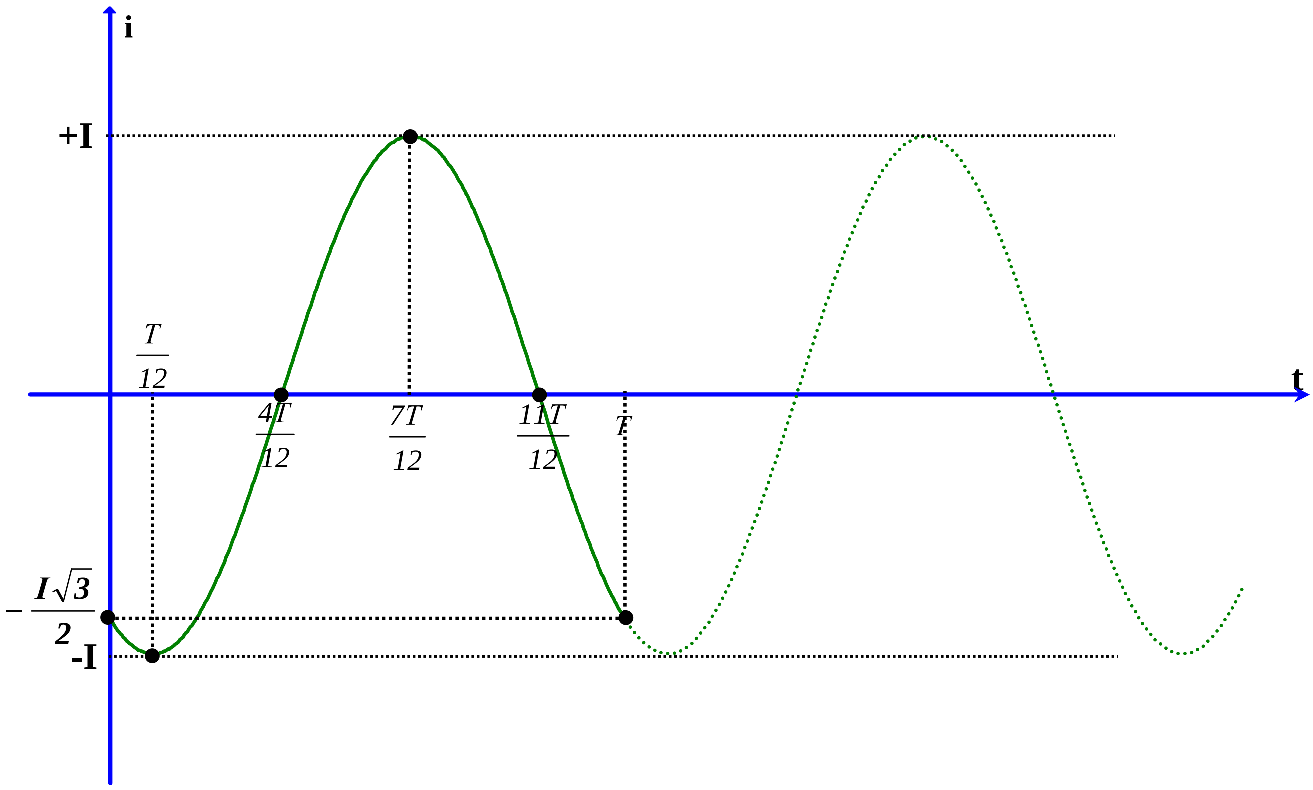
Θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι την t=0, το ρεύμα εξωτερικά έχει φορά από τον θετικά φορτισμένο οπλισμό του πυκνωτή προς τον αρνητικά φορτισμένο, που σημαίνει ότι ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Άρα το φορτίο του οπλισμού αναφοράς μειώνεται κατ' απόλυτη τιμή. Εάν μετατοπίζαμε την αρχή συντεταγμένων μέχρι το σημείο Α, τότε την χρονική στιγμή $t=0^+$, το φορτίο θα αυξανόταν, πράγμα που δεν συμβαίνει.

Το ρεύμα κατά την συμβατική φορά μεταφέρει θετικά φορτία. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, μέσω του ρεύματος απομακρύνονται θετικά φορτία από τον θετικά φορτισμένο οπλισμό του πυκνωτή, άρα το αποθηκευμένο θετικό φορτίο σ' αυτόν ελαττώνεται και ταυτόχρονα το αποθηκευμένο αρνητικό φορτίο του άλλου οπλισμού μειώνεται λόγω εγκατάστασης θετικών φορτίων σ'

Ομοίως, για την γραφική παράσταση της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος σχεδιάζουμε την αντίστοιχη συνημιτονοειδή χωρίς αρχική φάση.



Την t=0 η ένταση του ρεύματος έχει τιμή $i = -0{,}2\sqrt{3} = -\frac{I\sqrt{3}}{2}$. Μετατοπίζουμε την αρχή των συντεταγμένων μέχρι η γραφική παράσταση να τμήσει τον κατακόρυφο άξονα της έντασης του ρεύματος στην τιμή $i = -\frac{I\sqrt{3}}{2}$. Αυτό παρατηρούμε ότι συμβαίνει σε δύο σημεία (Γ και Δ). Επειδή όμως την t=0 ο πυκνωτής εκφορτίζεται, η ένταση του ρεύματος θα πρέπει να αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή. Έτσι μετατοπίζουμε την αρχή των συντεταγμένων μέχρι το σημείο Γ (εάν μετατοπίζαμε την αρχή συντεταγμένων μέχρι το σημείο Δ, τότε την $t=0^+$ η απόλυτη τιμή της έντασης του ρεύματος θα ελαττωνόταν).



Επιμέλεια:
Πέτρος Καραπέτρος